

Universidade Federal do Paraná
Curso de Pós-graduação em Física
Defesa de Doutorado

Ana Cristina Sprotte Costa

Correlações Quânticas em Sistemas Abertos

Defesa apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutora em Física.

Orientador: *Prof. Dr. Marcus Werner Beims*

Co-Orientador: *Prof. Dr. Renato Moreira Angelo*

Curitiba - PR

2016

C837c

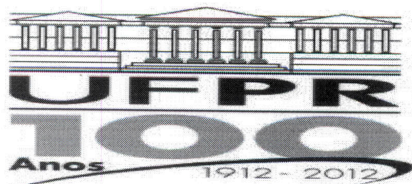
Costa, Ana Cristina Sprotte
Correlações quânticas em sistemas abertos / Ana Cristina Sprotte Costa.
– Curitiba, 2016.
139 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Orientador: Marcus Werner Beims – Co-orientador: Renato Moreira
Angelo.
Bibliografia: p. 117-128.

1. Teoria quântica. 2. Física. 3. Mecânica quântica. I. Universidade
Federal do Paraná. II. Beims, Marcus Werner. III. Angelo, Renato Moreira. IV.
Título.

CDD: 530.12



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

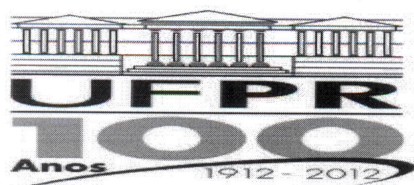
"Correlações Quânticas em Sistemas Abertos."

ALUNA

ANA CRISTINA SPROTTE COSTA

Em sessão pública iniciada as quatorze horas do dia 25 de julho de 2016, após um seminário sob o título acima e posterior arguição, esta banca examinadora decidiu APROVAR a candidata com o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)	<u>Marcus W.B.</u>	<u>A</u>
Prof. Dr. Alexandre Dias Ribeiro (UFPR)	<u>Alexandre Dias Ribeiro</u>	<u>A</u>
Prof. Dr. Rodrigo José Ochekoski Mossaneck (UFPR)	<u>Rodrigo J. O. Mossaneck</u>	<u>A</u>
Prof. Dr. Roberto Menezes Serra (UFABC)	<u>Roberto Menezes Serra</u>	<u>A</u>
Prof. Dr. Ruben Auccaise Estrada (UEPG)	<u>Ruben Auccaise Estrada</u>	<u>A</u>



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fone: (41) 3361-3096 Fax: (41) 3361-3418
E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

PARECER

Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Tese de Doutorado da aluna **ANA CRISTINA SPOTTE COSTA**, consideram aprovada a redação final da tese, cujo título é: *"Correlações Quânticas em Sistemas Abertos"*.

Curitiba, 25 de julho de 2016.

Banca Examinadora

Assinatura

Prof. Dr. Marcus Werner Beims (UFPR)

Prof. Dr. Alexandre Dias Ribeiro (UFPR)

Prof. Dr. Rodrigo José Ochekoski Mossaneck (UFPR)

Prof. Dr. Roberto Menezes Serra (UFABC)

Prof. Dr. Ruben Auccaise Estrada (UEPG)

Agradecimentos

- Ao Prof. Marcus Werner Beims e ao Prof. Renato Moreira Angelo pela orientação e por todo o apoio durante o Doutorado;
- Ao Prof. Walter T. Strunz por sua orientação durante o período de doutorado sanduíche na Universidade Técnica de Dresden - Alemanha;
- Aos familiares e amigos, que sempre estiveram presentes;
- À CAPES pelo suporte financeiro;
- Ao PROBRAL I – Colaboração Internacional Brasil (CAPES) e Alemanha (DAAD) – pelo suporte financeiro durante o período de doutorado sanduíche;
- Ao Grupo FISUX pelo código de formatação desta tese.

Resumo

Nesta tese estudamos correlações quânticas e os efeitos do ambiente em sistemas de dois qubits. Nossa análise se divide em dois aspectos principais: (i) estudo da hierarquia entre correlações quânticas, e (ii) análise do fluxo de correlações em sistemas tripartidos. Para o estudo da hierarquia, analisamos as seguintes correlações: discórdia quântica generalizada, emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell para estados X com marginais maximamente misturadas. Para introduzir o direcionamento EPR nessa análise, propomos um quantificador para sistemas gerais de dois qubits nos cenários de duas e três medições por sítio, baseado em desigualdades de direcionamento EPR bem estabelecidas. Além disso, estudamos a robustez das correlações sob canais de ruído, encontrando uma cronologia de mortes e ressurgimentos súbitos. Analisamos o fluxo de correlações em dois diferentes contextos. No primeiro, investigamos a dinâmica de informação entre as partes de sistemas tripartidos através de resultados envolvendo a monogamia da informação mútua. Em particular, encontramos um cenário típico no qual informação local tende a ser convertida em informação delocalizada. Ademais, calculamos analiticamente uma quantidade capaz de revelar regimes favoráveis para não-Markovianidade no nosso modelo. Numa segunda análise, baseada na dinâmica exata de um sistema de dois qubits e o ambiente, dado por um banho térmico usual de osciladores harmônicos, derivamos critérios de separabilidade e emaranhamento entre um estado X inicial e o ambiente, não encontrando nenhuma relação entre a perda de emaranhamento no sistema (de dois qubits) e o surgimento de emaranhamento entre o sistema e o ambiente.

Abstract

In this thesis we study quantum correlations and the effects of the environment in two-qubit systems. Our analysis is divided in two main aspects: (i) study of the quantum correlations hierarchy, and (ii) analysis of the flow of correlations in tripartite systems. For the study of hierarchy, we analyze the following correlations: generalized quantum discord, entanglement, EPR steering, and Bell nonlocality for X states with maximal marginals. In order to include steering in this analysis, we propose a quantifier for general two-qubit systems in scenarios of two- and three-measurements per site, based on steering inequalities well established. Besides that, we study the correlations robustness under noisy channels, finding a chronology of sudden deaths and sudden births. We analyze the flow of correlations in two different contexts. In the first, we investigate the information dynamics between the parts of tripartite systems through results involving the monogamy of mutual information. In particular, we find a typical scenario in which local information tends to be converted in delocalized information. Moreover, we calculate analytically a quantity capable of revealing favorable regimes for non-Markovianity in our model. In a second analysis, based on the exact dynamics of a system of two-qubit and the environment, given by an usual thermal bath of harmonic oscillators, we derive separability and entanglement criteria between an initial X state and the environment, not finding any relation between the lost of entanglement within the system of two-qubit and the build up of entanglement between the system and the environment.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Sumário	iv
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Conceitos preliminares	7
2.1 Mecânica quântica e os operadores densidade	7
2.2 Correlações clássicas e quânticas	9
2.2.1 Correlações clássicas	10
2.2.2 Correlações quânticas	12
2.3 Sistemas quânticos abertos	26

2.3.1	Representação de Kraus	28
2.4	Modelo	32
2.4.1	O qubit	32
2.4.2	Sistemas de dois qubits	33
2.4.3	Estados X	34
3	Quantificação de direcionamento EPR para sistemas de dois qubits	36
3.1	Modelos de localidade	38
3.1.1	Não-localidade de Bell	40
3.1.2	Direcionamento EPR	40
3.1.3	Emaranhamento	41
3.1.4	Hierarquia entre não-localidade de Bell, direcionamento EPR e emaranhamento	41
3.2	Critério experimental para direcionamento EPR	42
3.3	Desigualdade CHSH para direcionamento EPR	44
3.4	Quantificador de direcionamento EPR	44
3.5	Resultados	45
3.6	Emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade	49
4	Hierarquia de recursos quânticos e cronologia de mortes e ressurgimentos	55
4.1	Hierarquia e cronologia em diagramas $Q_2 \times Q_1$	55
4.2	Resultados	59
4.2.1	Equivalência de todas as discórdias- q	60
4.2.2	Hierarquia dos recursos quânticos	62

4.2.3	Cronologia de “mortes” e “ressurgimentos” em canais quânticos . .	64
5	Monogamia e fluxo de informação mútua em banhos térmicos não-Markovianos	72
5.1	Observações preliminares	73
5.1.1	Informação do estado e informação mútua	73
5.1.2	Correlações tripartidas genuínas	74
5.1.3	Monogamia da informação mútua	75
5.2	Fluxo de informação numa dinâmica de defasagem	78
5.3	Estudo de caso: dois qubits em um reservatório bosônico finito	81
5.3.1	Correlações quânticas versus correlações clássicas	86
5.3.2	Uma medida de não-Markovianidade	87
6	Correlações sistema-reservatório para estados de dois qubits acoplados a banhos térmicos	91
6.1	Dilação para um qubit sob canal de defasagem	92
6.1.1	Estado inicial do ambiente puro: dilação emaranhada	94
6.1.2	Estado inicial do ambiente misto: dilação separável	95
6.2	Modelo para o sistema-reservatório	96
6.3	Dinâmica do estado total	99
6.3.1	Separabilidade sistema-reservatório	100
6.3.2	Emaranhamento sistema-reservatório	101
6.4	Resultados numéricos para estados de Werner	103
6.4.1	<i>Acoplamento fraco</i> ($\kappa = 10^{-3}$)	104
6.4.2	<i>Acoplamento forte</i> ($\kappa = 1$)	107
6.4.3	Decaimento da concorrência	109

6.5	Outras bipartições	109
7	Conclusão	114
	Referências Bibliográficas	117
A	Matriz densidade de sistemas de dois qubits	129
B	Dinâmica completa do estado total	131
B.1	Representação parcial P do estado total	131
B.2	Dinâmica da função parcial P	132
B.3	Substituição das derivadas funcionais	135
B.3.1	Dinâmica exata: sistema de dois qubits num canal de defasagem . .	135

Lista de Figuras

3.1	Comparação numérica de $F_n(\rho)$ (eixo vertical) com $F_n(\rho, \mu)$ (eixo horizontal), com ambas as funções devidamente normalizadas, para 10^5 configurações μ geradas aleatoriamente mostrando que a primeira é de fato um limite superior para a segunda. A linha vermelha representa a situação quando $F_n(\rho) = F_n(\rho, \mu)$	49
4.1	Hierarquia $Q_1 \triangleright Q_2$ definida pela borda f (linha preta) para uma dada classe de estados.	56
4.2	Diagramas $D_q \times D_{q+\epsilon}$. Cada gráfico contém 10^6 pontos (azuis) gerados aleatoriamente, cada um correspondendo a um estado $\rho_{\vec{c}}$ e um dado ϵ gerado aleatoriamente do intervalo $[0, \epsilon_{\max}]$, com $\epsilon_{\max} = 3$. As bordas superiores e inferiores (linhas sólidas pretas) são dadas pelas fórmulas (4.1). Nesses cálculos usamos (a) $q = 0,05$, (b) $q = 1$, (c) $q = 3$, (d) $q = 5$ e (e) $q = 7$. . .	61
4.3	Diagramas $D_1 \times E$ (primeiro gráfico), $E \times \mathcal{D}$ (gráfico intermediário) e $\mathcal{D} \times N$ (último gráfico). Cada gráfico contém 10^6 pontos gerados aleatoriamente, cada um correspondendo a um estado $\rho_{\vec{c}}$. As bordas inferiores (linhas sólidas pretas) são dadas pelas fórmulas (4.2).	62
4.4	Hierarquia dos recursos quânticos para o conjunto de estados $\rho_{\vec{c}}$. Figura adaptada de http://quantumcorrelations.weebly.com/research.html	64

- 4.5 Instantâneos com $t_1 = 0,1$ (diagramas superiores), $t_2 = 0,3$ (diagramas intermediários) e $t_3 = 0,7$ (diagramas inferiores) para a evolução temporal de 55×10^4 estados $\rho_{\vec{c}}$ (pontos azuis) sob um canal Markoviano DP. No instante $t_0 = 0$, o cenário é como na figura 4.3. A linha grossa vermelha é a trajetória referente ao estado $\vec{c} = (-0,71, -0,75, -0,95)$, cujo comportamento é típico e a esfera vermelha é a posição desse estado nos instantes $t_{1,2,3}$. Note que existe uma dinâmica de morte súbita para todos os recursos exceto para a discórdia. 67
- 4.6 Diagrama tridimensional $N \times \mathcal{D} \times E$ mostrando a evolução temporal dos estados $\vec{c} = (-1, -1, -1)$ (linha sólida vermelha) e $\vec{c} = (0,84, 0,91, -0,84)$ (linha tracejada azul) sob os canais (a) IF, (b) DP e (c) AAG. Note que para o estado puro $\vec{c} = (-1, -1, -1)$ sob o canal IF, o desaparecimento dos recursos ocorre assintoticamente (veja Resultado 4). 68
- 4.7 (a) Recursos quânticos $Q(\rho_{\vec{c}})$ como função do tempo adimensional, onde $Q = D_1$ (linha sólida preta), $Q = E$ (linha tracejada vermelha), $Q = \mathcal{D}$ (linha pontilhada azul) e $Q = N$ (linha pontilhada-tracejada verde). Esses resultados se referem à dinâmica do estado de Werner $\vec{c} = (-0,8, -0,8, -0,8)$ num canal IF com taxa de decaimento $\lambda = 0,01$ [u.a.]. O gráfico (b) é uma magnificação de um domínio de tempo conveniente no qual podemos observar a cronologia de mortes e ressurgimentos. 70
- 5.1 $I_3/4$ (linha sólida) e \mathfrak{I} (linha pontilhada) como uma função de x para o estado (5.13). Monogamia é violada por estados mistos com $x \gtrsim 0,43596$. . 77
- 5.2 $I_3 - \mathfrak{I}$ (linha fina amarela) e $\min_{(A,B,C)}(I_{A:C} + I_{B:C})$ (linha pontilhada vermelha) como uma função de x para o estado (5.13). 78

- 5.3 $|\theta_-(t)|$ (primeira coluna) e $I_3(t)$ (segunda coluna) como uma função do tempo (em escala logarítmica) para $N = 10$, $c_{1,2,3} = -0,8$, $\hbar = \omega_0 = 1$, $g_A = 1$, $g_B = 2$ e $g_0 = 0,1$. Os parâmetros variando são a temperatura e a largura da distribuição espectral: (a,b) $\beta = 1$ e $\delta = 10N$; (c,d) $\beta = 0,1$ e $\delta = 10N$; (e,f) $\beta = 0,1$ e $\delta = N$. Todos os parâmetros são dados em unidades arbitrárias. A linha vertical em cada quadro representa o tempo de descoerência (5.37). 85
- 5.4 Discórdia quântica $D_{AB}^{\leftarrow}(t)$ (linha sólida) e informação acessível $J_{AB}^{\leftarrow}(t)$ (linha tracejada) em função do tempo (em escala logarítmica) para os mesmos parâmetros da figura 5.3-(e,f). Em (a) $c_{1,2,3} = -0,6$ e em (b) $c_{1,2} = -0,6$ e $c_3 = -0,5$. A linha vertical sólida descreve o tempo de descoerência (5.37), enquanto a linha vertical pontilhada em (b) descreve o tempo de mudança súbita (5.45). O valor constante da informação acessível é dada por $J_{AB}^{\leftarrow}(|c_3|)$. 87
- 5.5 Não-Markovianidade \mathcal{N}_M como uma função do inverso da temperatura β e o número de modos N para $\hbar = \omega_0 = 1$, $g_A = 1$, $g_B = 2$, $g_0 = 0,1$ e $\delta = 10N$. Nesta simulação usamos $t = 10^6$. Todos os parâmetros são dados em unidades arbitrárias. A não-Markovianidade é favorecida para poucos reservatórios e baixas temperaturas. 90
- 6.1 Esquema do modelo proposto. Sistema de dois qubits (AB) com o qubit A acoplado ao ambiente (R). 96
- 6.2 Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. Os parâmetros são: $\kappa = 10^{-3}$ (acoplamento fraco) e $w = 0,2$ (nenhum emaranhamento inicial entre os qubits). Notavelmente, para $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,13\hbar\omega_c$, o estado total oscila em função do tempo entre as regiões separável e emaranhada. . 104

- 6.3 Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência e a linha sólida a morte súbita de emaranhamento entre os dois qubits. Enquanto abaixo da linha sólida o sistema de dois qubits ainda tem algum emaranhamento, acima desta linha o emaranhamento desaparece. Os parâmetros são: $\kappa = 10^{-3}$ (acoplamento fraco) e (a) $w = 0,5$ e (b) $w = 0,9$. $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,16\hbar\omega_c$ em (a) e para $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,29\hbar\omega_c$ em (b). O estado total oscila em função do tempo entre as regiões separável e emaranhada. 106
- 6.4 Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. Os parâmetros são: $\kappa = 1$ (acoplamento forte) e $w = 0,2$ (nenhum emaranhamento inicial entre os dois qubits). A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência do estado de dois qubits. 107
- 6.5 Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência e a linha sólida a morte súbita de emaranhamento entre os dois qubits. Enquanto abaixo da linha sólida o sistema de dois qubits tem algum emaranhamento, acima dela todo emaranhamento desaparece. Os parâmetros são: $\kappa = 1$ (acoplamento forte), (a) $w = 0,5$ e (b) $w = 0,9$ 108
- 6.6 Concorrência (6.19) entre os dois qubits para acoplamento fraco ($\kappa = 10^{-3}$), com $w = 0,5$ e $k_B T = 0,1\hbar\omega_c$ (linha sólida), $k_B T = 0,2\hbar\omega_c$ (linha tracejada) e $k_B T = 0,3\hbar\omega_c$ (linha pontilhada). Podemos ver oscilações da concorrência, as quais se tornam mais suaves com o aumento da temperatura. 110

Lista de Tabelas

- 2.1 Operadores de Kraus para os canais quânticos: inversão de bit (IB), inversão de fase e bit (IFB), inversão de fase (IF), despolarização (DP) e atenuação de amplitude generalizada (AAG), onde p e γ são probabilidades de descoerência. 31
- 4.1 Resultados analíticos para as medidas de correlação quântica: discórdia- q (D_q), emaranhamento (E), direcionamento EPR (\mathcal{D}) e não-localidade de Bell (N) para estados X de dois qubits $\rho_{\vec{c}}$ dados pela equação (2.55). Aqui, $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de $\rho_{\vec{c}}$, $c_{\max} \equiv \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$, $c_{\min} \equiv \min\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ e $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Uma normalização conveniente foi introduzida na discórdia- q de forma a assegurar que $D_q \in [0, 1]$ 60
- 4.2 Regras de transformação $\vec{c} \xrightarrow{\mathcal{E}} \vec{c}'$ emergindo do mapeamento $\mathcal{E}(\rho_{\vec{c}}) = \rho_{\vec{c}'}$ associado aos canais quânticos: inversão de bit (IB), inversão de fase e bit (IFB), inversão de fase (IF), despolarização (DP) e atenuação de amplitude generalizada (AAG). Aqui consideramos que ambos os qubits estão sujeitos ao mesmo canal quântico. 65

Capítulo 1

Introdução

No século XX ocorreram muitas revoluções científicas. Duas teorias que tiveram origem nessa época, e que tem um grande impacto na atualidade, são a mecânica quântica e a teoria de informação. A mecânica quântica surgiu num contexto onde a física conhecida (chamada atualmente de física clássica) não era suficiente para explicar certos fenômenos que começaram a ser detectados em experimentos mais sofisticados, como o efeito fotoelétrico, difração e interferência de partículas materiais, entre outros. A partir desse ponto, a mecânica quântica foi desenvolvida e até hoje revela propriedades das estruturas básicas das substâncias, como por exemplo, dos átomos, de supercondutores, do DNA e de partículas elementares da natureza. Já a teoria de informação surgiu a partir da necessidade de melhorar dispositivos de comunicação [1] e imediatamente levou à formulação matemática do conceito de informação. A teoria de informação foi criada, portanto, para estudar a quantificação, armazenamento e comunicação de informação.

Sabe-se que existe uma conexão entre física quântica e teoria de informação. Isso é especialmente verdade no campo da física estatística, por exemplo, onde o conceito de entropia quantifica a quantidade de desordem do sistema; similarmente, a entropia de Shannon [1] é dada pela mesma fórmula e quantifica nossa falta de informação sobre um sistema e, portanto, a quantidade de informação obtida quando uma medição sobre o sistema é realizada. De forma mais acentuada, a partir dos trabalhos de Szilard [2], Landauer [3] e Bennett [4], tornou-se claro que informação é física [5]: apagar informação, por exemplo, só é possível com o custo do aumento da entropia do ambiente.

Outro aspecto fundamental, em ambas as teorias, é a existência de *correlações*. Em teoria de informação, a correlação que existe entre duas variáveis aleatórias é dada por uma medida conhecida como informação mútua. Essa medida, baseada na entropia de Shannon, é capaz de nos dizer a quantidade de informação que duas variáveis compartilham. Em outras palavras, é a quantidade de informação que se pode obter de uma variável através da outra variável. Uma outra definição, porém classicamente equivalente, pode ser dada pela quantidade de incerteza (ou falta de informação) restando numa variável, quando a outra é conhecida.

Em mecânica quântica, o estudo de correlações *quânticas* surgiu de um quadro muito mais profundo, ligado à natureza de sistemas quânticos. Esse estudo teve início com o paradoxo EPR [6], em 1935, onde Einstein, Podolsky e Rosen formularam um experimento mental com o qual eles argumentam que a teoria quântica não é uma teoria completa, ou seja, não possui os requisitos básicos para que seja aceita como uma teoria física. A ideia por trás do paradoxo EPR é o conceito de realismo local, ou seja, a hipótese de que, numa teoria completa, os objetos físicos possuem propriedades definidas que são independentes do processo de observação (elemento de realidade), e de que uma medida feita por um observador não pode influenciar medidas feitas por outro observador, se eles estiverem separados de tal forma que a troca de informações entre eles seja impossível (causalidade). Em resposta ao paradoxo EPR, Schrödinger evidenciou a característica não-local da mecânica quântica, que ele chamou de *emaranhamento* [7, 8].

Após essas discussões, muitos acreditavam que a mecânica quântica era de fato local, porém existiam aspectos que eram inacessíveis aos experimentos da época, de forma que foram propostos modelos baseados em *variáveis ocultas*. Se tivéssemos acesso a essas variáveis, a mecânica quântica não apresentaria mais as divergências apontadas pelo EPR. Foi só na década de 1960 que Bell formalizou essa proposta e criou um teste baseado nas distribuições de probabilidade dos resultados dos experimentos que incluíam as variáveis ocultas [9]. Ele mostrou que a mecânica quântica viola esses testes, sendo assim uma teoria não-local. Os estados que violavam esses testes (ou desigualdades) passaram a ser chamados de estados de Bell não-locais. Essas correlações, existentes entre sistemas quânticos, é o que chamamos de correlações quânticas não-locais e eram sinônimos de emaranhamento. Em 1989, entretanto, Werner mostrou que existem estados mistos que não violam os testes de Bell, porém são estados emaranhados [10]. Além disso, Popescu

mostrou que estados emaranhados com correlações locais poderiam ser utilizados para teleporte de estados quânticos com mais eficiência do que se conseguia usando a teoria clássica [11]. Esses trabalhos deram origem a uma nova linha de pesquisa interessada na natureza das correlações e suas diferenças.

Esse cenário se tornou ainda mais complexo quando Henderson e Zurek [12] e, de forma independente, Ollivier e Vedral [13], propuseram uma nova medida de correlações a partir de aspectos da teoria de informação. Eles mostraram, baseados nas duas versões para informação mútua generalizadas para o caso quântico, que existem estados separáveis (não-emaranhados) que ainda apresentam correlações quânticas. A essa nova medida foi dado o nome de discórdia quântica. Anos mais tarde, um novo conceito de correlação entrou em jogo, uma medida chamada de direcionamento EPR¹, termo cunhado por Schrödinger numa das respostas aos autores do paradoxo EPR. Essa nova medida, proposta por Wiseman e colaboradores [14–16], é baseada na habilidade de um sistema orientar o estado de outro através de escolhas locais da base de medida.

As correlações quânticas são importantes em dois diferentes aspectos, tanto de desenvolvimento tecnológico, estudado pelas áreas de informação quântica e computação quântica, quanto para a área de fundamentos da teoria quântica, onde se busca um melhor entendimento a respeito da natureza nos seus níveis mais básicos. Por exemplo, cada uma das medidas de correlação quântica citadas acima é responsável por tarefas distintas em informação e computação quântica – emaranhamento é essencial para teleporte quântico [17–19]; a discórdia quântica tem-se mostrado como um recurso físico para protocolos quânticos [20–22], com a vantagem de ser menos frágil a canais de ruído [23, 24]; direcionalidade EPR tem sido usada para tarefas envolvendo geração de aleatoriedade [25]; não-localidade foi provada ser útil para distribuição de chaves quânticas [26–28] – citando somente algumas de suas possíveis aplicações.

Apesar da incontestável relevância das testemunhas de quanticidade mencionadas acima, é justo dizer que até a presente data ainda não é completamente claro qual é a conexão essencial entre elas, se existir alguma. Apesar dessas testemunhas serem logicamente distintas, todas elas concordam em diagnosticar quando um estado puro bipartido é correlacionado quanticamente. Por outro lado, para estados mistos a situação é bem

¹Tradução livre do termo inglês “EPR steering”.

diferente: existem estados discordantes (com discórdia não-nula) sem emaranhamento, estados emaranhados sem direcionamento EPR, e estados EPR direcionáveis sem não-localidade. No lado formal, apesar de oferecer uma definição rigorosa para direcionamento EPR, Wiseman *et al* [14] provaram que estados EPR direcionáveis formam um subconjunto estrito dos estados emaranhados, e um superconjunto estrito dos estados que exibem não-localidade de Bell. Essas descobertas estabelecem uma hierarquia formal entre emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell especificamente para o caso de um número infinito de medidas, uma situação claramente impraticável. No que diz respeito a situações realísticas, para as quais somente um número finito de configurações são permitidas e descoerência é geralmente inevitável, não é claro se esta hierarquia irá se manter, em que medida e quais suas consequências.

Uma outra questão que surge naturalmente é como as correlações quânticas se comportam frente ao processo de descoerência. A teoria de descoerência, no contexto de teoria da informação, foi proposta na década de 1990, a partir dos trabalhos de Caldeira e Leggett [29] e Zurek [30]. A ideia parte de modelar o ambiente mais um sistema central por uma dinâmica Hamiltoniana unitária e então aplicar uma operação que elimina as variáveis inacessíveis do reservatório. O sistema central então apresenta uma dinâmica dissipativa e não-unitária, que destrói as coerências quânticas. A descoerência é resultado da interação entre esse sistema e o reservatório, o qual chamamos de ambiente. Muitos trabalhos se dedicam ao estudo desse fenômeno, e isso se dá por dois motivos centrais: (i) coerências quânticas e correlações quânticas multipartidas são recursos essenciais para o processamento de informação quântica [31] e a possibilidade de controlar e manipular informação quântica é limitada pela descoerência e pela dissipação; (ii) o fenômeno de descoerência fornece um suporte para problemas conceituais em mecânica quântica, como a transição quântico-clássico e o problema da medida em sistemas quânticos. No desenvolvimento das ciências de informação quântica e computação quântica é importante encontrar estados que podem ser utilizados para protocolos de computação e entender como eles se comportam quando interagem com o ambiente. Normalmente, foca-se no estudo das correlações somente para o sistema central, eliminando-se os graus de liberdade do ambiente, e o fenômeno de descoerência é muitas vezes associado ao emaranhamento que surge entre o sistema central e o ambiente. Porém, existem poucas discussões sobre como as correlações quânticas se distribuem com a dinâmica dentro de um sistema fechado

e o surgimento de correlações entre o sistema e o ambiente não pode ser descrito somente no nível reduzido.

O objetivo desta tese se insere nos quadros apresentados acima, tanto na discussão entre as diferentes medidas de correlações quânticas, quanto na análise de seu comportamento frente ao fenômeno de descoerência. É de fundamental interesse quantificar o quão robustas elas são quando interagem com um ambiente. Além disso, também estamos interessados na distribuição de correlações numa dinâmica interagente entre o sistema central e o ambiente. Analisar esses diferentes aspectos é a contribuição central desta tese para as áreas de teoria da informação quântica e computação quântica. Dessa forma, a tese está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 2 fazemos uma introdução dos conceitos primitivos e fundamentais que serão abordados e utilizados na tese. Primeiro, apresentamos o formalismo do operador densidade. Segundo, definimos correlações clássicas e quânticas, e mostramos as principais medidas de correlações quânticas, excluindo o direcionamento EPR, que será discutido no capítulo 3. Em terceiro, fazemos uma discussão sobre sistemas quânticos abertos e fechamos o capítulo com a apresentação do modelo de dois qubits que será utilizado ao longo da tese.

O capítulo 3 é reservado somente para a discussão envolvendo direcionamento EPR. Neste capítulo mostramos diferentes modelos de localidade e como o direcionamento EPR se insere na hierarquia entre emaranhamento e não-localidade. A partir desses modelos mostramos como foi derivada uma desigualdade para a detecção de direcionamento EPR e apresentamos outra desigualdade proposta na literatura fundamentalmente diferente. A contribuição desta tese nesse cenário está na obtenção de uma fórmula fechada baseada nas duas desigualdades para a detecção de direcionamento EPR no contexto de sistemas gerais de dois qubits. Enfim, apresentamos uma análise analítica envolvendo a hierarquia entre emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade.

No capítulo 4, um dos nossos objetivos é a extensão da análise de hierarquia apresentada no capítulo 3 – incluindo agora a discórdia quântica – através de um cenário concreto no contexto de diagramas de recursos, com os quais é possível elaborar uma definição formal para essa hierarquia. Para complementar esse quadro, implementamos uma dinâmica através de canais quânticos, simulando um acoplamento com um ambiente

onde se pode analisar situações de perda de coerências quânticas, refletidas nas mortes súbitas das correlações. Além disso, também é analisado um ambiente não-Markoviano, onde possíveis ressurgimentos súbitos podem ocorrer.

No capítulo 5, analisamos conceitos como fluxo de informação, monogamia, assim como não-Markovianidade, tópicos que têm aparecido com grande frequência na literatura recente de informação quântica. Primeiro, removemos a aproximação de reservatórios de temperatura nula, que imediatamente nos leva a considerar estados mistos. Segundo, focamos nossa análise numa dinâmica de defasagem (amortecimento de fase), na qual o fluxo de informação acontece sem qualquer transferência de energia. Terceiro, investigamos a dinâmica de informação olhando para as correlações totais entre partes do sistema. Em particular, discutimos as condições sob as quais a informação mútua se torna monogâmica. Quarto, ao invés de utilizarmos o formalismo de Kraus para canais quânticos arbitrários, que é usualmente empregado para modelar reservatórios infinitos, consideramos explicitamente *banhos térmicos finitos*. Tais banhos podem apresentar regimes com recorrências, que nos permitem analisar o fluxo de informação e não-Markovianidade.

Para finalizar a tese, no capítulo 6 apresentamos um estudo sobre como as correlações entre o sistema e o ambiente surgem quando descoerência e perda de emaranhamento ocorrem no sistema central. Para isso analisamos o modelo de dois qubits, acoplando um deles a um ambiente de natureza descoerente. Esta é uma extensão de investigações anteriores [32, 33] onde somente um qubit foi acoplado a banhos térmicos compostos por osciladores harmônicos. De fato, como é um modelo com solução analítica, podemos construir condições para separabilidade e emaranhamento SR (sistema-reservatório), e compará-las com o emaranhamento presente no sistema de dois qubits.

O capítulo 7 é reservado para um breve sumário e conclusões.

Conceitos preliminares

Neste capítulo iremos apresentar os conceitos fundamentais para o desenvolvimento dessa tese. Na primeira seção definimos os operadores densidade em mecânica quântica e suas propriedades. Na segunda seção mostramos correlações clássicas e quânticas, dando ênfase aos diferentes quantificadores de correlações quânticas. Discutimos sistemas quânticos abertos na terceira seção e fechamos o capítulo apresentando sistemas de dois qubits, os quais formam o modelo que iremos fundamentar nossas análises.

2.1 Mecânica quântica e os operadores densidade

Em mecânica quântica estados físicos são representados por elementos normalizados $|\psi\rangle$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Porém, quando consideramos sistemas estatisticamente mistos, essa abordagem deixa de ser conveniente. Dessa forma, usualmente utilizamos o conceito de operadores densidade ρ , também conhecidos como *matrizes densidade*. A linguagem do operador densidade fornece uma maneira conveniente para descrever um sistema quântico cujo estado não é completamente conhecido.

Em equivalência aos vetores $|\psi\rangle$, têm-se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, os quais são referidos como estados puros. Todos os outros estados são misturas de estados puros, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, com números reais não-negativos $p_i \leq 1$ e $\sum_i p_i = 1$, os quais representam a probabilidade p_i de encontrar o sistema no estado puro $|\psi_i\rangle$.

O operador densidade ρ deve satisfazer algumas propriedades para que represente um estado físico, as quais são

1. Hermiticidade $\rightarrow \rho^\dagger = \rho$.
2. ρ é um operador com traço unitário $\rightarrow \text{Tr}\rho = 1$.
3. ρ é um operador positivo semi-definido, ou seja, $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$ para qualquer estado quântico puro $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$.

A propriedade do traço pode ser provada da seguinte forma:

$$\text{Tr}\rho = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_i p_i = 1, \quad (2.1)$$

dado que a soma das probabilidades é igual a um. A positividade do operador densidade é dada por

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0. \quad (2.2)$$

Essa desigualdade sempre vale, pois as probabilidades são sempre maiores ou iguais a zero. Além disso, o procedimento padrão $\langle O \rangle_\psi = \langle \psi | O | \psi \rangle$ para encontrar o valor esperado de um observável O pode ser estendido para estados mistos através da relação: $\langle O \rangle_\rho = \text{Tr}[O\rho] = \sum_i p_i \langle \psi_i | O | \psi_i \rangle$.

Uma das maiores aplicações do operador densidade é como uma ferramenta descritiva para *subsistemas* de um sistema quântico composto. Tal descrição é dada pelo operador densidade reduzido. Considere um operador densidade ρ_{AB} , o qual representa um sistema bipartido com subsistemas A e B , no espaço de Hilbert composto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Para descrever o estado do subsistema A (ou estado reduzido), devemos realizar uma operação sobre o estado composto, tal que

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (2.3)$$

onde o traço é um mapa de operadores conhecido como *traço parcial* sobre o sistema B .

Por exemplo, para uma subclasse especial de operadores, o traço parcial é definido por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.4)$$

onde $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são dois vetores quaisquer em \mathcal{H}_A e $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ são dois vetores quaisquer em \mathcal{H}_B . Além disso, $\text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2|b_1\rangle$ é a operação usual do traço.

A justificativa física para utilizar esta operação é que o operador densidade reduzido fornece as estatísticas corretas para medições feitas no subsistema A , pois a operação do traço parcial é a única que dá origem à descrição correta de quantidades observáveis para subsistemas de um sistema composto [31].

2.2 Correlações clássicas e quânticas

Correlações são elementos essenciais em teorias físicas. A informação que se pode obter da natureza é de alguma forma determinada pelo quanto o sistema de interesse pode ser correlacionado, via interações físicas, com o aparato de medida. Não é surpreendente, portanto, que correlações ocupem um lugar proeminente na ciência de informação. No que diz respeito ao dilema “quântico versus clássico”, a questão naturalmente aparece quando as propriedades quânticas das correlações desempenham um papel distinto ao das correlações clássicas. Em particular, correlações quânticas têm se mostrado no núcleo de diversas áreas da física, desde fenômenos fundamentais, tal como não-localidade [6, 9, 11], descoerência [34], e realidade emergente [35, 36], ao campo promissor de informação e computação quântica [31, 37–39].

Nesta seção iremos apresentar correlações de natureza clássica e quântica, mencionando as diferenças entre elas. Após essa apresentação estaremos aptos a definir diferentes quantificadores de correlações quânticas que serão utilizados ao longo da tese e que são recursos essenciais para informação, computação e criptografia quântica [31].

2.2.1 Correlações clássicas

Em teoria de informação clássica [1], a incerteza associada a uma variável aleatória X é quantificada pela entropia de Shannon:

$$H(X) = - \sum_x p_x \log_2 p_x, \quad (2.5)$$

onde p_x é a probabilidade de X assumir o valor x . A entropia de Shannon também pode ser interpretada como a informação obtida quando se conhece o valor da variável X . Se X assumir valores do conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, a entropia de Shannon será máxima quando os resultados forem igualmente prováveis ($\frac{p_{x_i}}{n}$) e mínima quando um dos possíveis resultados tenha probabilidade igual a um (nesse caso $H(X) = 0$).

Considere agora duas variáveis aleatórias X e Y , com distribuições de probabilidade p_x e p_y , respectivamente. A incerteza conjunta associada às duas variáveis aleatórias é dada por

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p_{x,y} \log_2 p_{x,y}. \quad (2.6)$$

A correlação entre essas duas variáveis aleatórias X e Y é medida pela informação mútua,

$$J(X : Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (2.7)$$

onde $H(X|Y) = \sum_y p_y H(X|y)$ é a entropia condicional de X dado que foi feita uma medida do valor de Y . Todas as distribuições de probabilidade são derivadas da probabilidade conjunta, $p_{X,Y}$:

$$p_X = \sum_y p_{X,y}, \quad p_Y = \sum_x p_{x,Y}, \quad (2.8)$$

$$p_{X|y} = \frac{p_{X,y}}{p_y} \quad (\text{regra de Bayes}). \quad (2.9)$$

De acordo com a regra de Bayes, $p_{X|y}$ se refere ao conhecimento disponível sobre uma variável aleatória X depois que um dado resultado y foi medido para a variável Y . Por

outro lado, $p_{X|y}$ e p_y representam, respectivamente, a probabilidade de $X \cap (Y = y)$ e a probabilidade do resultado y , sem referência à medida de X . Eles podem ser considerados como o conhecimento prévio ao processo de inferência. De $p_{X|y} = (p_{X,y}/p_X p_y)p_X$ vemos como o conhecimento prévio p_X é atualizado após uma medida em Y , contanto que X e Y sejam eventos dependentes. Para distribuições independentes, $p_{X,Y} = p_X p_Y$, de modo que $H(X|Y) = H(X)$.

Assim, vemos que a informação mútua $J(X : Y)$ corresponde ao desvio da situação de “independência”. Logo, é uma medida das correlações entre X e Y . Isto é, a informação mútua mede a diminuição média da entropia em X quando fazemos uma medida em Y . Usando a regra de Bayes (2.9), temos que

$$H(X|y) = - \sum_x p_{x|y} \log_2(p_{x|y}) = - \sum_x \frac{p_{x,y}}{p_y} \log_2 \left(\frac{p_{x,y}}{p_y} \right), \quad (2.10)$$

a qual nos permite reescrever a entropia condicional na forma

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_y p_y \sum_x \frac{p_{x,y}}{p_y} \log_2 \left(\frac{p_{x,y}}{p_y} \right) \\ &= - \sum_{x,y} p_{x,y} \log_2(p_{x,y}) + \sum_y p_y \log_2(p_y) \\ &= H(X, Y) - H(Y). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim temos uma expressão classicamente equivalente para a informação mútua:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (2.12)$$

Nessa forma, observamos que não é necessário fazer uma medida do valor de Y . A informação mútua pode ser obtida através da entropia de cada variável e da entropia conjunta $H(X, Y)$. Logo, classicamente, essas duas expressões são idênticas:

$$I(X : Y) = J(X : Y). \quad (2.13)$$

Qualquer uma das expressões acima pode ser utilizada para calcular correlações clássicas entre variáveis aleatórias.

A motivação original de Shannon ao desenvolver esse quadro de teoria de informação foi a necessidade prática de quantificar a capacidade de canais de comunicação clássica. Neste cenário, X e Y representam a mensagem enviada e recebida pelo canal, respectivamente.

No cenário quântico, a informação é armazenada nos estados quânticos de um sistema físico. As variáveis aleatórias são substituídas pelos observáveis e seus possíveis valores por autovalores dos observáveis. A entropia de Shannon é associada à sua versão quântica, conhecida como entropia de von Neumann. Porém, as expressões acima já não são suficientes para descrever correlações entre sistemas quânticos. Um dos motivos é a inexistência de modelos locais de variáveis ocultas. Esse aspecto da Mecânica Quântica é conhecido como *não-localidade*, o qual vamos descrever detalhadamente na próxima seção.

2.2.2 Correlações quânticas

Para transmissão e processamento de informação quântica, devemos levar em consideração as propriedades quânticas dos sistemas, as quais dão origem a correlações que diferem das correlações clássicas que descrevemos acima. Na literatura existem muitos trabalhos que demonstram vantagens significativas das correlações quânticas em relação às clássicas em processos de informação e computação [11, 24, 31, 40]. Para entender melhor esse contexto, nesta seção iremos apresentar o desenvolvimento do estudo de correlações quânticas e diferentes recursos usados para quantificar essas correlações.

Não-localidade de Bell

O estudo de correlações quânticas teve origem no início do século XX, com o desenvolvimento da teoria quântica. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) publicaram um artigo [6] no qual eles argumentavam que uma teoria física deveria satisfazer três propriedades:

- *realismo* \rightarrow implica que um elemento de realidade num sistema físico é uma quantidade cujo valor pode ser conhecido da teoria com certeza sem perturbar o próprio sistema;

- *completeza* \rightarrow cada elemento de realidade deve ser descrito por um objeto da teoria;
- *localidade* \rightarrow processos físicos ocorrendo em um determinado lugar não devem ter um efeito imediato em elementos da realidade em outro local.

O artigo EPR apontou que a teoria quântica não é completa porque não satisfaz as três propriedades ao mesmo tempo. De fato, isso paradoxalmente implica que quantidades físicas incompatíveis, representadas por observáveis não-comutantes, tem realidade simultânea. Considere um sistema com estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB})$. Se uma medida na base $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ (na direção do spin σ_z) em A tem resultado “0”, então se sabe com certeza, sem perturbar o sistema B , que uma segunda medida nesse subsistema na mesma base tem o resultado “1”. Em uma nova realização, fazendo uma mudança de base, obtemos $\frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle_{AB} - |+-\rangle_{AB})$, com $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$. Se realizamos uma medida em A na base $\{|+\rangle_A, |-\rangle_A\}$ (na direção do spin σ_x), e obtém-se um resultado “-”, então o resultado da segunda medida em B tem resultado “+” com certeza. Logo, os autoestados de observáveis incompatíveis (i.e., as componentes de spin local σ_z e σ_x) são ambas reais ao mesmo tempo. Porém, supostamente, a escolha da base local não deveria alterar a realidade distante.

Na década de 1960, Bell descobriu que as condições de realismo, completeza e localidade impõem que correlações estatísticas nas medidas espacialmente separadas devem satisfazer algumas condições conhecidas atualmente como *desigualdades de Bell*. Ele desenvolveu uma teoria que satisfaz os três critérios introduzindo quantidades adicionais, conhecidas como *variáveis ocultas*, cujos valores não são unicamente definidos por um estado quântico [9]. Um modelo local de variáveis ocultas seria capaz de reproduzir todas as previsões da mecânica quântica sem apresentar a contradição apresentada pelo paradoxo EPR.

Mas, ao contrário do que se esperava com a introdução das variáveis ocultas, a teoria quântica prevê que as desigualdades de Bell são violadas por alguns estados emaranhados, uma condição conhecida como *não-localidade*. Os primeiros experimentos que comprovaram as previsões de Bell foram realizados por Freedman e Clauser [41] em 1972, e por Aspect e colaboradores [42] em 1982. Até os dias atuais são realizados diversos experimentos que demonstram que estados emaranhados violam as desigualdades de Bell.

Para entender melhor a proposta de Bell, imagine a seguinte situação¹. Suponha que você possui uma fonte que prepara e envia um par de partículas para laboratórios separados espacialmente, uma partícula é enviada para Alice e a outra para Bob. Alice pode escolher uma de muitas medidas possíveis para realizar em seu sistema e vamos usar x para denotar sua escolha de medida. Similarmente, vamos usar y para denotar a escolha de medida de Bob. Uma vez que as medidas são feitas, eles produzem resultados a e b nos dois sistemas.

De uma execução do experimento para outra, os resultados a e b que são obtidos podem variar, mesmo quando as escolhas de medida x e y feitas são as mesmas. Esses resultados são, em geral, governados pela distribuição de probabilidade $p(ab|xy)$ que podem depender do experimento em particular sendo realizado. Repetindo o experimento um número suficiente de vezes e coletando os dados observados, tem-se uma estimativa de tais probabilidades.

Quando tal experimento é realizado – por exemplo, gerando pares de partículas de spin-1/2 e medindo o spin de cada partícula em diferentes direções – será encontrado, em geral, que

$$p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y), \quad (2.14)$$

implicando que os resultados em ambos os laboratórios não são estatisticamente independentes entre si. Mesmo se ambos os sistemas estiverem separados espacialmente, a existência de tais correlações não é espantosa. Em particular, não implica necessariamente em algum tipo de influência direta de um sistema no outro, de forma que essas correlações podem simplesmente revelar alguma relação de dependência entre os dois sistemas que foi estabelecida quando eles interagiram no passado. Isso é pelo menos o que se poderia esperar de uma teoria local.

Vamos formalizar a ideia de teoria local mais precisamente. A suposição de localidade implica que deveríamos ser aptos a identificar um conjunto de fatores, descritos por variáveis λ , tendo uma influência conjunta causal em ambos os resultados, e que explica totalmente a dependência entre a e b . Uma vez que tais fatores são considerados, a indeterminação residual sobre os resultados deve ser desacoplada; isto é, as probabilidades

¹Essa demonstração é baseada na referência [43].

para a e b devem fatorizar em

$$p(ab|xy, \lambda) = p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda). \quad (2.15)$$

Essa condição de fatorabilidade simplesmente expressa o fato que encontramos uma explicação de acordo com a qual a probabilidade depende somente das variáveis λ e das medidas locais. O conjunto de variáveis λ não precisa ser necessariamente idêntico para todas as execuções do experimento, mesmo se o procedimento que prepara as partículas a serem medidas seja fixo, pelo fato de que λ pode envolver quantidades físicas que não são totalmente controláveis. Os diferentes valores de λ devem então ser caracterizados por uma distribuição de probabilidade $q(\lambda)$. Combinando com a condição de fatorabilidade, podemos então escrever

$$p(ab|xy) = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda), \quad (2.16)$$

onde assumimos implicitamente que as medidas x e y podem ser livremente escolhidas numa maneira independente de λ , isto é, que $q(\lambda|x, y) = q(\lambda)$. Essa decomposição agora representa uma condição precisa para localidade no contexto dos experimentos de Bell. Note que nenhuma hipótese de determinismo ou de um “comportamento clássico” está envolvida na equação (2.16). Em termos relativísticos, expressa a exigência de que os eventos em uma região não devem influenciar os acontecimentos em outra região separada espacialmente.

Entretanto, as previsões da teoria quântica para certos experimentos envolvendo partículas emaranhadas não admitem uma decomposição na forma (2.16). Para estabelecer esse resultado, consideramos por simplicidade um experimento onde existem somente duas escolhas de medida por observador, $x, y \in \{0, 1\}$ e onde os possíveis resultados assumem também dois valores, $a, b \in \{-1, +1\}$. Seja $\langle a_x b_y \rangle = \sum_{a,b} ab p(ab|xy)$ o valor esperado do produto ab para as escolhas de medida (x, y) e considere a seguinte expressão

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle, \quad (2.17)$$

que é uma função de probabilidades $p(ab|xy)$. Se essas probabilidades satisfizerem a

decomposição de localidade (2.16), temos necessariamente que

$$S = \langle a_0 b_0 \rangle + \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle - \langle a_1 b_1 \rangle \leq 2, \quad (2.18)$$

que é conhecida como a desigualdade Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [44]. Para derivar esta desigualdade, podemos usar a equação (2.16) na definição de $\langle a_x b_y \rangle$, o que nos permite expressar esse valor esperado como uma média $\langle a_x b_y \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \langle a_x \rangle_\lambda \langle b_y \rangle_\lambda$ de um produto de valores esperados locais $\langle a_x \rangle_\lambda = \sum_a a p(a|x, \lambda)$ e $\langle b_y \rangle_\lambda = \sum_b b p(b|y, \lambda)$ assumindo valores no intervalo $[-1, 1]$. Inserindo essa expressão na equação (2.18), podemos escrever $S = \int d\lambda q(\lambda) S_\lambda$, com

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda + \langle a_0 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda + \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_0 \rangle_\lambda - \langle a_1 \rangle_\lambda \langle b_1 \rangle_\lambda \\ &= \langle a_0 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda) + \langle a_1 \rangle_\lambda (\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como $\langle a_0 \rangle_\lambda, \langle a_1 \rangle_\lambda \in [-1, 1]$, temos que $S_\lambda \leq |\langle b_0 \rangle_\lambda + \langle b_1 \rangle_\lambda| + |\langle b_0 \rangle_\lambda - \langle b_1 \rangle_\lambda|$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\langle b_0 \rangle_\lambda \geq \langle b_1 \rangle_\lambda \geq 0$ o que produz $S_\lambda = 2\langle b_0 \rangle_\lambda \leq 2$, e então $S = \int d\lambda q(\lambda) S_\lambda \leq 2$.

Considere agora as previsões quânticas para um experimento no qual dois sistemas medidos por Alice e Bob são dois qubits no estado singlete $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, e onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são convencionalmente os autoestados de σ_z para os autovalores $+1$ e -1 , respectivamente. Considere as escolhas de medidas x e y associadas com os vetores \vec{x} e \vec{y} correspondendo a medidas de $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ no primeiro qubit e $\vec{y} \cdot \vec{\sigma}$ no segundo qubit, onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ denota o vetor de Pauli. De acordo com a teoria quântica, temos então os valores esperados $\langle a_x b_y \rangle = -\vec{x} \cdot \vec{y}$. Considere as duas configurações $x \in \{0, 1\}$ correspondentes a medidas nas direções ortogonais \hat{e}_1 e \hat{e}_2 , respectivamente, e as configurações $y \in \{0, 1\}$ a medidas nas direções $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$. Temos então que $\langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 b_1 \rangle = \langle a_1 b_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\langle a_1 b_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, e então

$$S = 2\sqrt{2} > 2, \quad (2.20)$$

em contradição com a equação (2.18) e, logo, com a restrição de localidade (2.16). Esse resultado corrobora o teorema de Bell, no qual as previsões da teoria quântica são incompatíveis com uma teoria local de variáveis ocultas, estabelecendo o caráter não-local dessa

teoria.

Além da desigualdade demonstrada acima, existem várias propostas de desigualdades de Bell na literatura. Duas delas são de particular interesse neste trabalho, a desigualdade CHSH [44] e a desigualdade de Bell-3322 [45].

Para sistemas de dois qubits, a desigualdade CHSH, que foi demonstrada acima, é a mais conhecida, e pode ser reescrita nesse contexto como

$$B(\rho, \mu) := |\text{Tr}(\rho B_{\text{CHSH}})| \leq 2, \quad (2.21)$$

onde B_{CHSH} , um operador de Bell atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é dado por

$$B_{\text{CHSH}} = \hat{a}_1 \cdot \vec{\sigma}^A \otimes (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \cdot \vec{\sigma}^B + \hat{a}_2 \cdot \vec{\sigma}^A \otimes (\hat{b}_1 - \hat{b}_2) \cdot \vec{\sigma}^B, \quad (2.22)$$

onde $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1$ e \hat{b}_2 são vetores unitários reais, num cenário que envolve duas medições por sítio e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli. Esse operador envolve configurações de medida μ , dadas pelos vetores $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1$ e \hat{b}_2 , de Alice e Bob e é convenientemente concebido para garantir que a desigualdade acima seja satisfeita por qualquer ρ descritível por um modelo local de variáveis ocultas. Note que $B(\rho, \mu)$ depende de configurações de medida escolhidas, de forma que essa desigualdade pode ser violada numa certa configuração e não em outras, tal que se for encontrada ao menos uma configuração que ocorra violação, o sistema quântico é tratado como não-local.

Normalmente, a não-localidade é definida em termos de desigualdades, que apenas afirmam se o estado é não-local, caso ele viole a desigualdade para uma dada configuração de medida. Na literatura existem poucas propostas de quantificar a *não-localidade* de um sistema quântico, ou ainda, determinar se um sistema é mais não-local que outro. Fonseca e Parisio consideram o *volume de violações* como uma alternativa para o grau de não-localidade [46]. Eles afirmam que um sistema quântico ρ é mais não-local que outro sistema ρ' se o primeiro viola a desigualdade, para qualquer medida, por uma quantidade maior de configurações de medida do que o último. Em outras palavras: ρ é mais não-local que ρ' se, por uma escolha aleatória imparcial de configurações, a probabilidade de obter uma violação é maior para ρ . A partir desse argumento eles definem um volume de violações.

Sabe-se que canais de ruído destroem as coerências quânticas e, consequentemente, as correlações quânticas entre sistemas. Dessa forma, a robustez sob um canal é definida pelo tempo que uma dada correlação é suprimida pelo canal de ruído. Ou seja, quanto mais correlacionado for o sistema, mais tempo as correlações demoram para desaparecer sob ação desses canais. No nosso trabalho usamos o argumento de que um estado que viola mais uma desigualdade, sendo então mais robusto sob canais de ruído, é dito ser mais não-local. Para isso, fazemos um processo de otimização sobre as configurações de medida de forma a encontrar aquela que apresente a maior violação. Quando o sistema estiver sob a ação dinâmica de um canal de ruído, é essa violação a última a ser suprimida. Dessa forma, propomos um quantificador de não-localidade de Bell como a quantidade pela qual a desigualdade acima é maximamente violada. Dado um estado ρ e escolhendo uma normalização conveniente, temos

$$N(\rho) := \max \left\{ 0, \frac{B(\rho) - 2}{B_{\max} - 2} \right\}, \quad (2.23)$$

onde $B(\rho) := \max_{\mu} B(\rho, \mu)$, sendo que a otimização seleciona a configuração de medida μ que maximiza a não-localidade. Como $B(\rho) \leq B_{\max}$, onde B_{\max} é a máxima violação que pode ocorrer para essa desigualdade, obtida ao varrer ambos ρ e μ . Esse valor máximo é conhecido como limite de Cirel'son [47], e é igual a $B_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Outra desigualdade de Bell que utilizamos na tese é conhecida como desigualdade I_{3322} [45]. Ela difere da desigualdade CHSH pelo fato de envolver *três* medidas dicotômicas por sítio e é dada por

$$\begin{aligned} I_{3322} = & p(A_1 B_1) + p(A_2 B_1) + p(A_3 B_1) + p(A_1 B_2) + p(A_2 B_2) - p(A_3 B_2) \\ & + p(A_1 B_3) - p(A_2 B_3) - p(A_1) - p(B_2) - 2p(B_1) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde $p(A_i B_j) = \text{Tr}(M_i^A \otimes M_j^B \rho)$, $p(A_k) = \text{Tr}(M_k^A \otimes \mathbb{1} \rho)$ e $p(B_k) = \text{Tr}(\mathbb{1} \otimes M_k^B \rho)$ são probabilidades associadas às medidas de von Neumann $M_i^A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{u}_i \cdot \vec{\sigma})$ e $M_i^B = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{v}_i \cdot \vec{\sigma})$, para vetores unitários $\{\hat{u}_i, \hat{v}_i\} \in \mathbb{R}^3$. O quantificador normalizado para essa desigualdade, o qual chamamos convenientemente de N_3 , é dado por

$$N_3(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{I_{3322}(\rho)}{I_{3322}^{\max}} \right\}, \quad (2.25)$$

onde $I_{3322}(\rho) := \max_{\mu} I_{3322}(\rho, \mu)$, com a otimização selecionando a configuração de medida μ que maximiza a não-localidade para três medidas por sítio. Além disso, $I_{3322}^{\max} = 1/4$, resultado encontrado numericamente em [45]. Da mesma forma que acontece com o quantificador da desigualdade CHSH, $N_3(\rho) \in [0, 1]$.

No contexto de informação e computação quântica, a não-localidade de Bell é útil para diversos protocolos, como distribuição de chaves quânticas [26–28], geração de aleatoriedade [48], e complexidade de comunicação quântica [49].

Recentemente, dois experimentos [50, 51] envolvendo as desigualdades de Bell receberam bastante atenção da comunidade científica. Testar as violações dessas desigualdades requer um procedimento experimental complicado, gerando muitas vezes “furos” (*loopholes*) que podem ser contestados utilizando teorias clássicas. Para que um experimento seja considerado “incontestável” (*loophole-free*) ele precisa excluir qualquer comunicação possível entre os observadores separados espacialmente (*locality loophole*) e garantir medidas eficientes (*detection loophole*). A inovação proposta por esses dois trabalhos recentes é que eles conseguiram violar a desigualdade de Bell CHSH sem apresentar qualquer furo, ou seja, com testes incontestáveis. Em [50], os autores utilizaram uma fonte otimizada de fótons emaranhados, geração rápida de configurações e detectores supercondutores altamente eficientes, observando uma violação da desigualdade de Bell com alta significância estatística. O outro experimento, proposto por Giustina e colaboradores [51], conseguiu-se demonstrar a violação da desigualdade de Bell para spins de elétrons separados numa distância de 1,3 km. Esses experimentos comprovam, sem qualquer furo, que a mecânica quântica viola as desigualdades de Bell, evidenciando sua natureza não-local.

Emaranhamento

Por muito tempo acreditou-se que a existência de correlações quânticas estava associada à ideia de não-localidade, evidenciada por desigualdades de Bell. Estados que não violavam essas desigualdades passaram a ser definidos como estados clássicos. Porém, essa noção de correlação quântica teve uma reviravolta quando Werner [10] mostrou a existência de estados mistos emaranhados que não violavam as desigualdades de Bell. Ou seja, estados que mesmo sem violar essas desigualdades ainda apresentavam correlações quânticas. Por causa desse fato a noção de estados clássicos teve de ser reformulada, e

eles passaram a ser definidos como estados que podem ser criados por *operações locais e comunicação clássica* (*local operations and classical communication - LOCC*). Operações locais são operações feitas em apenas parte do sistema, ou seja, são realizadas localmente num dos subsistemas do sistema composto; enquanto comunicação clássica se refere à transmissão de informação utilizando dispositivos clássicos, como uma ligação telefônica entre dois laboratórios. Os estados clássicos definidos a partir de operações locais e comunicação clássica são separáveis, ou seja, é possível fatorar o estado composto como um produto dos seus estados constituintes.

Para estados bipartidos puros, dizemos que um estado é *separável* se puder ser escrito na forma

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.26)$$

caso contrário o estado do sistema é dito *emaranhado*. Dessa forma, emaranhamento é definido como a não-separabilidade de um estado quântico. Se um estado não puder ser gerado através de operações locais e comunicação clássica ele é não-separável e, consequentemente, emaranhado.

Para estados puros utiliza-se a entropia de von Neumann do estado para estabelecer uma medida de emaranhamento do sistema, e ela é dada por

$$S_1(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 \rho] = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.27)$$

onde λ_i são os autovalores de ρ (no caso de autovalores nulos temos $0 \log_2 0 = 0$, resultado obtido do $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x$)². O uso da entropia de von Neumann para quantificar emaranhamento foi introduzida por Bennett *et al.* [52].

A esta quantidade baseada na entropia de von Neumann damos o nome de entropia de emaranhamento, $E_{vN}(\rho)$. Para estados separáveis, $E_{vN}(\rho) = 0$ e, para estados emaranhados, $0 < E_{vN}(\rho) \leq \log_2 \mathcal{D}$, onde \mathcal{D} é a dimensão do subsistema. Se $E_{vN}(\rho) = \log_2 \mathcal{D}$, o estado é dito maximamente emaranhado. O emaranhamento entre as partes A e B de

²A base 2 é escolhida pela influência da teoria de informação, onde todos os logaritmos são calculados nesta base.

um estado puro bipartido pode ser calculado então por

$$E_{vN}(\rho_{AB}) = S_1(\rho_A) = S_1(\rho_B) = - \sum_{\mu} \lambda_{\mu} \log_2 \lambda_{\mu}, \quad (2.28)$$

onde λ_{μ} são os autovalores de ρ_A ou ρ_B . Ela é considerada uma boa medida pois satisfaz uma série de condições consideradas necessárias que medidas de emaranhamento devem satisfazer. Essas condições são listadas a seguir [53]:

- Se ρ for separável, então a medida de emaranhamento $E(\rho) = 0$.
- O grau de emaranhamento de ρ não pode aumentar devido a operações locais e comunicações clássicas.
- *Normalização*: O emaranhamento de um estado puro maximamente emaranhado ρ de dimensão $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$ é dado por $E(\rho) = \log_2 \mathcal{D}$.
- *Continuidade*: No limite em que a distância entre dois estados tende a zero, a diferença entre seus emaranhamentos deve tender a zero, ou seja, $E(\rho) - E(\rho') \rightarrow 0$, para $\|\rho - \rho'\| \rightarrow 0$, onde $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}[A^\dagger A]}$ é a norma de Hilbert-Schmidt.
- *Aditividade*: O emaranhamento de n cópias idênticas de ρ deve ser igual a n vezes o emaranhamento de uma cópia $\Rightarrow E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$.
- *Subaditividade*: O emaranhamento do produto tensorial de dois estados não deve ser maior que a soma do emaranhamento de cada estado $\Rightarrow E(\rho \otimes \rho') \leq E(\rho) + E(\rho')$.
- *Convexidade*: O emaranhamento deve ser uma função convexa, de forma que

$$E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\rho') \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\rho'), \quad \text{para } 0 < \lambda < 1. \quad (2.29)$$

Os requisitos listados acima valem tanto para medidas de emaranhamento de estados puros, quanto para medidas de emaranhamento de estados mistos, as quais vamos definir abaixo.

Partindo da definição de emaranhamento para estados puros, podemos estender o conceito para misturas estatísticas. Assim, um estado bipartido misto ρ_{AB} é dito separável

se puder ser escrito como uma mistura de estados separáveis

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{A,i} \otimes \rho_{B,i}. \quad (2.30)$$

Entretanto, não podemos utilizar o mesmo argumento do cálculo de emaranhamento usando a entropia de von Neumann do estado reduzido para estados mistos, pois cada sub-sistema pode ter entropia nula mesmo quando o estado global do sistema é emaranhado. Dessa forma, foram desenvolvidos alguns quantificadores que se baseiam em propriedades matemáticas das matrizes densidade dos sistemas [54–56].

Dentre os quantificadores para emaranhamento de estados bipartidos mistos, existe a *concorrência* [55, 57],

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (2.31)$$

onde λ_i são os autovalores em ordem decrescente da matriz $\rho\tilde{\rho}$, a qual é obtida depois do cálculo de uma operação spin-flip $\tilde{\rho} \equiv \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ de ρ . $C(\rho)$ é um quantificador de emaranhamento, sendo 0 para estados separáveis e 1 para estados maximamente emaranhados.

Outro quantificador de emaranhamento é conhecido como emaranhamento de formação [52, 55], que é definido como a média de emaranhamento dos estados puros da decomposição de um estado misto $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, minimizados sobre todas as decomposições de ρ :

$$E_{of}(\rho) = \min_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S_1(\text{Tr}_B[|\psi_i\rangle\langle\psi_i|]), \quad (2.32)$$

onde S_1 é a entropia de von Neumann (2.27). Outra forma de definir emaranhamento de formação é através de uma função monótona da concorrência (2.31), ou seja,

$$E_{of}(\rho) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2} \right), \quad (2.33)$$

onde $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$.

Nesta tese também iremos utilizar um critério de detecção de emaranhamento para estados mistos conhecido como critério de Peres-Horodecki [58, 59]. O critério de Peres é baseado nos autovalores de uma matriz *parcialmente transposta* em respeito a um dos subsistemas de um estado bipartido ρ . Se esses autovalores forem positivos, o estado ρ é separável. Mas, se pelo menos um autovalor é negativo, o estado ρ é dito emaranhado. Como mostrado em [59], esse critério é uma condição necessária e suficiente para separabilidade de sistemas bipartidos com dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$, sendo somente condição necessária para dimensões maiores.

Do ponto de vista de aplicações em informação e computação quântica, foi provado que o emaranhamento pode ser utilizado como recurso para a execução de várias tarefas [31]. Por exemplo, estados emaranhados podem ser utilizados para a *codificação superdensa* [60], onde são enviados dois bits de informação clássica usando somente um qubit. Outra aplicação é o *teleporte quântico* [17], que é um processo com o qual informação quântica (o estado de um átomo ou um fóton) pode ser transmitido de um lugar a outro, com a ajuda de comunicação clássica e um par de estados emaranhado.

Um ponto importante que devemos salientar é o fato de que todos os estados emaranhados puros violam as desigualdades de Bell [61]. Porém, a situação muda quando estados mistos passam a ser considerados. Como mencionamos no início dessa subseção, Werner mostrou que existem estados emaranhados (mistos) que não violam nenhuma desigualdade de Bell [10]. Dessa forma, emaranhamento é uma medida que captura correlações não-clássicas para uma gama maior de estados, em comparação com não-localidade.

Discórdia quântica generalizada

O emaranhamento foi aceito por muito tempo como a medida essencial para a determinação de correlações quânticas, dada sua validade tanto para estados puros, quanto para estados mistos. Porém, podemos nos perguntar se existe alguma correlação que vai além daquela detectada pelo emaranhamento. Em outras palavras, será que existem correlações quânticas mesmo para estados separáveis? Nesta subseção vamos mostrar que a resposta a essa pergunta é positiva.

Sabemos que em mecânica quântica um processo de medida perturba o estado de um sistema quântico, ao contrário do que acontece na teoria clássica. Dessa forma, é possível

concluir que a perturbação induzida por uma medida é uma boa evidência da presença de características quânticas no sistema. Essa perturbação no sistema muda as propriedades do estado global, em particular na quantidade das correlações entre os subsistemas. Assim, Ollivier e Zurek [13], e de forma independente, Henderson e Vedral [12], propuseram uma medida baseada na perturbação induzida pela medida, a qual ficou conhecida como *discórdia quântica*.

A discórdia quântica é baseada na generalização da informação mútua para sistemas quânticos, que definimos na seção 2.2.1. Nós mostramos que a partir da regra de Bayes a informação mútua pode ser obtida de duas formas (2.13), uma que depende da medida, que chamamos de $J(X : Y)$ (2.7), e outra que é independente, $I(X : Y)$ (2.12). Classicamente, as duas expressões são idênticas, dado que uma medição não perturba o estado do sistema. Porém, como mencionamos acima, quanticamente o mesmo não pode ser afirmado, de forma que a discórdia quântica é então baseada na diferença entre essas duas quantidades.

Para um sistema quântico bipartido ρ , os análogos quânticos das duas expressões para informação mútua são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\rho) &\equiv S_1(\rho_A) + S_1(\rho_B) - S_1(\rho), \\ \mathcal{J}(\rho) &\equiv S_1(\rho_A) - S_1(\rho_{A|B}),\end{aligned}\tag{2.34}$$

onde $S_1(\rho)$ é entropia de von Neumann (2.27), a versão quântica da entropia de Shannon e $S_1(\rho_{A|B})$ é a entropia condicional quântica e depende do observável que medimos no subsistema B . Assim, a discórdia quântica é definida como a mínima diferença entre essas expressões, uma maneira de capturar correlações “puramente” quânticas. Matematicamente,

$$\begin{aligned}D(\rho) &= \min_{\{\Pi_b\}} [I(\rho) - J(\rho)] \\ &= S_1(\rho_B) - S_1(\rho) + \min_{\{\Pi_b\}} \sum_b p_b S_1(\rho_{A|b}),\end{aligned}\tag{2.35}$$

onde $\rho_{A|b} = \text{Tr}_B(\Pi_b \rho) / p_b$ é a matriz densidade condicional, $p_b = \text{Tr}(\Pi_b \rho)$ é a probabilidade do resultado b e $\Pi_B[\rho] = \sum_b \Pi_b \rho \Pi_b$, sendo que $\Pi_b = |b\rangle\langle b|$ é o projetor de von Neumann associado com o observável discreto B . Note que o processo de minimização é feito para que a fórmula final da discórdia não dependa da escolha do conjunto de projetores

de medida. Logo, define-se a discórdia quântica como sendo o resultado obtido para a diferença das informações mútuas no caso em que a medida produz o menor desvio.

Alguns anos mais tarde, Zurek reformulou a discórdia quântica [34], ligando a sua definição com a diferença entre a eficiência de demônios clássicos e quânticos em extrair trabalho termodinâmico de um banho térmico, a qual passou a ser conhecida como *discórdia térmica*, denominada também como *discórdia entrópica*, e é dada por

$$D_E(\rho) = \min_{\{\Pi_b\}} \left(S_1(\Pi_B[\rho_B]) + \sum_b p_b S_1(\rho_{A|b}) \right) - S_1(\rho). \quad (2.36)$$

Comparada com a discórdia da equação (2.35), $D_E(\rho)$ envolve a minimização de uma soma da entropia local e da entropia condicional e portanto, adicionalmente leva em consideração o custo entrópico de realizar medidas locais [62].

Por causa da dificuldade no processo de otimização para a obtenção da discórdia, inclusive numericamente, uma nova proposta foi formulada baseada numa versão geométrica em termos da norma de Schmidt [63], chamada de *discórdia geométrica*, e é dada por

$$D_G(\rho) := \min_{\Pi_B} \|\rho - \Pi_B[\rho]\|^2, \quad (2.37)$$

onde $\|\rho\|^2 := \text{Tr}(\rho^\dagger \rho)$ é o quadrado da norma no espaço de Hilbert-Schmidt. Essa medida calcula a mínima distância entre um estado ρ e seu estado condicional, dado que uma medida é realizada num dos subsistemas. Se a medida não perturbar o sistema global, eles representam o mesmo estado quântico, e, portanto, a distância geométrica entre eles é nula. Mas se uma mínima perturbação acontece, a discórdia geométrica é diferente de zero, mostrando que esse estado é quanticamente correlacionado.

Assim, a discórdia entrópica (2.36) baseia-se numa diferença entre medidas de informação, enquanto a discórdia geométrica (2.37) é baseada numa medida de distância entre estados quânticos. Apesar de terem naturezas diferentes, essas duas medidas capturam correlações de mesma natureza. Recentemente um resultado importante foi obtido a fim de conectá-las, mostrando que as duas podem ser obtidas a partir do desvio da regra de Bayes, isto é, do fato de que a *atualização Bayesiana* na mecânica quântica modifica o estado do sistema. Outro fator interessante é a conexão com a teoria de trabalho termo-

dinâmico generalizado através da relação trabalho-informação. A unificação dessas duas versões foi chamada de discórdia- q [64, 65], e é definida como

$$D_q(\rho) = \min_{\Pi_B} \left(S_q(\Pi_B[\rho]) - S_q(\rho) \right), \quad (2.38)$$

onde $S_q(\rho) = \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q-1}$ ($q > 0 \in \mathbb{R}$) é a entropia- q de Tsallis [66, 67]. A discórdia entrópica (térmica) é obtida da discórdia- q quando $q = 1$ e a discórdia geométrica quando $q = 2$.

Apenas recentemente a discórdia foi introduzida como um recurso físico para protocolos quânticos [20–22], com a vantagem de ser menos frágil a canais de ruído [23, 24] (veja também as referências [40, 62] para revisões recentes sobre discórdia quântica). Ela também foi proposta como a quantidade responsável pela vantagem computacional de um modelo com pouco ou nenhum emaranhamento [68, 69].

A partir dos quantificadores de correlações quânticas – ou *recursos quânticos* – citados acima, temos um panorama geral sobre a estrutura das correlações em sistemas quânticos. Para estados puros, todos os recursos concordam em testemunhar a presença de correlações quânticas. O quadro é diferente quando estados mistos são considerados. Existem estados que não violam as desigualdades de Bell, mas são emaranhados, e estados separáveis que apresentam discórdia quântica diferente de zero.

2.3 Sistemas quânticos abertos

Neste trabalho, também estamos interessados nos efeitos do ambiente em sistemas quânticos. O estudo sobre esses efeitos é baseado no acoplamento de um sistema a um ambiente com muitos graus de liberdade, teoricamente descrito em termos de partículas quânticas em equilíbrio térmico numa temperatura T . O acoplamento com o ambiente força o sistema a evoluir numa dinâmica não-unitária e, em geral, dissipativa. Usualmente, o ambiente é modelado por um número grande de partículas (graus translacionais, de spin, etc.) que se correlacionam com o sistema à medida que ocorre a dinâmica e, assim, destroem sua coerência quântica além de drenar sua energia. Tipicamente, o tempo de descoerência é muito menor que o tempo de relaxação, o que justifica o interesse em uma dinâmica não-dissipativa, a qual será analisada em alguns capítulos da tese.

Em muitos casos, o ambiente assume as características de um “reservatório térmico”, sendo assim descrito por uma distribuição de Boltzman quântica definida por uma temperatura T . O modelo seminal de reservatório, em que se empregam osciladores harmônicos unidimensionais foi concebido por Caldeira e Leggett [29] em 1985.

Considere então um sistema quântico bipartido, consistindo de um sistema de interesse S e um ambiente (reservatório) R . Tal arranjo é chamado de sistema quântico aberto, onde o termo na verdade se refere ao sistema de interesse. Os espaços de Hilbert do sistema quântico aberto \mathcal{H}_S e seu ambiente \mathcal{H}_R juntos formam o espaço de Hilbert do sistema fechado total $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. A dinâmica de um estado quântico é descrita por uma operação unitária em todo o espaço de Hilbert do sistema. No formalismo do operador densidade podemos utilizar a equação de von Neumann para obter tal dinâmica,

$$\dot{\rho}_T(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_T, \rho_T(t)], \quad (2.39)$$

onde ρ_T pode ser um estado constituído de muitas partes, ou *multipartido*.

Se quisermos obter a dinâmica de um estado reduzido ρ_{red} , devemos realizar a operação do traço parcial sobre os graus de liberdade que compõem a parte que não estamos interessados. Então, temos que

$$\dot{\rho}_{red}(t) = -\frac{i}{\hbar}\text{Tr}_R([H_T, \rho_T(t)]), \quad (2.40)$$

onde H_T é o Hamiltoniano que atua em todo o sistema. Entretanto, para obter a dinâmica de um operador densidade reduzido a partir desta equação é preciso determinar o estado total ρ_T , o que em geral não é simples de se obter. As derivações de equações fechadas para $\rho_{red}(t)$ são conhecidas como *equações mestras quânticas*.

Para derivar equações mestras quânticas usualmente são feitas duas aproximações, de Born e Markov. A primeira delas assume que a interação entre o sistema e o ambiente é suficientemente fraca. A segunda despreza correlações de tempos curtos entre o sistema e o ambiente, ou seja, o tempo característico do sistema é muito maior que o tempo associado ao decaimento das correlações entre as variáveis do reservatório. Quando ambas as condições são satisfeitas dizemos que o processo é Markoviano. Nesse caso, a informação transferida para o ambiente é rapidamente distribuída entre os graus de liberdade do am-

biente, sem retorno de informação para o sistema, ou seja, não existe efeito de memória. Entretanto, as aproximações de Born e Markov não são sempre válidas. Nesse caso, o sistema quântico aberto é chamado de não-Markoviano e informação pode retornar ao sistema. Nesta tese, vamos analisar tanto processos Markovianos, quanto não-Markovianos, em diferentes contextos.

2.3.1 Representação de Kraus

Além do formalismo envolvendo equações mestras, existe um outro muito útil na descrição da dinâmica do estado reduzido. Esse formalismo é conhecido como *representação do operador soma* (representação de Kraus) [31]. Ele auxilia na implementação de interações do ambiente através de *canais de ruído quântico*, que agem somente no sistema de interesse sem precisar descrever as propriedades do ambiente. Nesta subseção vamos apresentar esse formalismo e diferentes canais que serão utilizados na tese.

Consideramos a descrição da dinâmica de um sistema quântico aberto como decorrente de uma interação entre o sistema de interesse, que podemos chamar de sistema principal e um ambiente, os quais juntos formam um sistema quântico fechado, como discutido acima. Em outras palavras, suponha que temos um sistema num estado ρ , que é mandado para uma caixa que é acoplada a um ambiente. Em geral, o estado final do sistema, $\mathcal{E}(\rho)$, pode não estar relacionado por uma transformação unitária ao estado inicial ρ . Nós assumimos que o estado de entrada sistema-ambiente é um estado produto, $\rho \otimes \rho_R$. Depois da transformação da caixa U o sistema não interage mais com o ambiente e então realizamos um traço parcial sobre o ambiente para obter o estado reduzido do sistema sozinho:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_R [U(\rho \otimes \rho_R)U^\dagger]. \quad (2.41)$$

Os operadores de Kraus são construídos da seguinte forma. Seja $|e_k\rangle$ uma base ortonormal para o espaço de estado do ambiente (de dimensão finita), e seja $\rho_R = |e_0\rangle\langle e_0|$ o estado inicial do ambiente. Não há perda de generalidade em assumir que o ambiente começa num estado puro, de forma que, se ele inicia num estado misto, nós somos livres para introduzir um sistema extra purificando o ambiente. Embora este sistema extra seja “fictício”, não faz diferença para a dinâmica experimentada pelo sistema principal, e então

pode ser usado como um passo intermediário nos cálculos³. A equação (2.41) pode então ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= \sum_i \langle e_i | U [\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|] U^\dagger | e_i \rangle \\ &= \sum_i K_i \rho K_i^\dagger,\end{aligned}\tag{2.42}$$

onde $K_i \equiv \langle e_i | U | e_0 \rangle$ é um operador no espaço de estado do sistema principal. A equação (2.42) é conhecida como representação do operador soma de \mathcal{E} . Os operadores $\{K_i\}$ são conhecidos como *elementos de operação* para o operador quântico \mathcal{E} .

Os elementos de operação satisfazem uma restrição importante conhecida como *relação de completeza*. No caso clássico, a relação de completeza surge a partir da exigência que a distribuição de probabilidade seja normalizada a um. No caso quântico, a relação de completeza aparece da exigência análoga que o traço de $\mathcal{E}(\rho_S)$ deve ser igual a um,

$$1 = \text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = \text{Tr}\left(\sum_i K_i \rho K_i^\dagger\right) = \text{Tr}\left(\sum_i K_i^\dagger K_i \rho\right).\tag{2.43}$$

Como essa relação é verdade para todo ρ , então temos que

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}.\tag{2.44}$$

Esta operação é satisfeita por operações quânticas que preservam o traço.

A representação do operador soma é importante porque ela nos dá uma forma *intrínseca* de caracterização da dinâmica do sistema principal. Ela descreve a dinâmica do sistema principal sem precisar considerar explicitamente as propriedades do ambiente; tudo que precisamos saber está codificado nos operadores K_i , que atuam no sistema principal unicamente, simplificando os cálculos. Além disso, muitas interações diferentes do ambiente podem dar origem à mesma dinâmica no sistema principal. Se é apenas a dinâmica do sistema principal que nos interessa, então faz sentido escolher uma representação da dinâmica que não inclua informação que não seja importante sobre outros sistemas. Se, ao contrário, estivermos interessados na dinâmica do sistema total, as características

³Uma abordagem mais profunda envolvendo processos com diferentes ambientes é realizada no capítulo 6, onde discutimos a dilatação de um sistema quântico.

do ambiente são importantes, e a representação do operador soma deixa de ser apropriada na análise de tais situações.

Interpretação física da representação do operador soma. Imagine que uma medida projetiva $\Pi_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ é realizada no ambiente depois da transformação unitária U ter sido aplicada. O resultado i será obtido com probabilidade

$$\begin{aligned} p_i &= \text{Tr}\left(|e_i\rangle\langle e_i|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_i\rangle\langle e_i|\right) \\ &= \text{Tr}\left(\langle e_i|U|e_0\rangle\rho\langle e_0|U^\dagger|e_i\rangle\right) \\ &= \text{Tr}(K_i\rho K_i^\dagger). \end{aligned} \quad (2.45)$$

E o estado (não-normalizado) do sistema principal dado que o resultado i ocorreu, é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i &= \text{Tr}_R\left(|e_i\rangle\langle e_i|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_i\rangle\langle e_i|\right) \\ &= \langle e_i|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_i\rangle = \langle e_i|U|e_0\rangle\rho\langle e_0|U^\dagger|e_i\rangle \\ &= K_i\rho K_i^\dagger. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Normalizando $\tilde{\rho}_i$, temos

$$\rho_i = \frac{K_i\rho K_i^\dagger}{\text{Tr}(K_i\rho K_i^\dagger)}, \quad (2.47)$$

Então,

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i p_i \rho_i = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger. \quad (2.48)$$

Isto nos dá uma interpretação física do que está acontecendo numa operação quântica com elementos de operação $\{K_i\}$. A ação da operação quântica é equivalente a pegar o estado ρ e aleatoriamente substituí-lo por $K_i\rho K_i^\dagger/\text{Tr}(K_i\rho K_i^\dagger)$, com probabilidade $\text{Tr}(K_i\rho K_i^\dagger)$. Neste sentido, é muito parecido com o conceito de canais de comunicação com ruído usado em teoria de informação clássica; dessa maneira, algumas vezes nós vamos nos referir a algumas operações quânticas que descrevem o processo de ruído quântico como canais de ruído quântico. Os canais que vamos utilizar ao longo dessa tese são construídos

com os conjuntos de Kraus listados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Operadores de Kraus para os canais quânticos: inversão de bit (IB), inversão de fase e bit (IFB), inversão de fase (IF), despolarização (DP) e atenuação de amplitude generalizada (AAG), onde p e γ são probabilidades de descoerência.

Canal	Operadores de Kraus	
IB	$K_0 = \sqrt{1 - p/2} \mathbb{1},$	$K_1 = \sqrt{p/2} \sigma_1.$
IFB	$K_0 = \sqrt{1 - p/2} \mathbb{1},$	$K_1 = \sqrt{p/2} \sigma_2.$
IF	$K_0 = \sqrt{1 - p/2} \mathbb{1},$	$K_1 = \sqrt{p/2} \sigma_3.$
DP	$K_0 = \sqrt{1 - 3p/4} \mathbb{1},$	$K_{1,2,3} = \sqrt{p/4} \sigma_{1,2,3}.$
AAG	$K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix},$ $K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$	$K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}.$

Cada canal da tabela 2.1 descreve diferentes efeitos do ambiente no sistema. Os canais inversão de bit (*bit flip*), inversão de fase e bit (*bit-phase flip*) e inversão de fase (*phase-flip*) destroem a informação contida nas relações de fase (coerências) do sistema quântico sem troca de energia com o ambiente. O canal despolarização (*depolarizing*) leva o estado do sistema quântico para o estado completamente misturado, $\rho = \frac{\mathbb{1}}{2}$. Finalmente, o canal atenuação de amplitude generalizada (*generalized amplitude damping*) é o canal utilizado para descrever a interação dissipativa entre o sistema e o ambiente, ou seja, o sistema perde energia para o ambiente até atingirem o equilíbrio térmico.

A dependência temporal é usualmente inserida nas probabilidades de descoerência, com $p(t)$ e $\gamma(t)$, onde se usam funções decrescentes no tempo, de forma que quando $p(0) = \gamma(0) = 0$ o canal não modifica o estado inicial, até o caso em que $p(\infty) = \gamma(\infty) \approx 1$, onde o efeito do canal é máximo e dizemos que ocorreu a descoerência total. Vamos especificar futuramente quais as taxas de descoerência iremos analisar.

Nesta seção apresentamos a dinâmica de sistemas quânticos abertos e a representação do operador soma, mas em alguns capítulos da tese iremos escrever explicitamente o estado do ambiente e suas propriedades, de forma a obter dinâmicas diferentes daquelas que se pode obter utilizando os operadores de Kraus.

2.4 Modelo

Nesta seção iremos definir o modelo que será utilizado em nossas análises nesta tese. Vamos nos concentrar em sistemas de dois qubits, elementos essenciais para a teoria de informação quântica. Para isso, precisamos inicialmente definir o conceito de *qubit* e depois, sistemas de dois qubits.

2.4.1 O qubit

O *bit* é o conceito mais fundamental em informação clássica e computação clássica, o qual pode assumir dois valores diferentes: 0 ou 1. Em Mecânica Quântica, um ente análogo ao bit clássico é o bit quântico, conhecido como *qubit*. Qualquer sistema quântico de dois níveis pode ser usado como um qubit, como por exemplo uma partícula de spin $1/2$ (como o elétron), um átomo de dois níveis ou até mesmo a polarização de um fóton (os dois estados são as polarizações vertical e horizontal).

No caso do spin do elétron, podemos representar os dois estados de um qubit como $|0\rangle$ (*spin up*) e $|1\rangle$ (*spin down*), definidos ao longo de um eixo particular, como o eixo- z . Os qubits, entretanto, diferem dos bits clássicos pela propriedade de apresentarem um estado que pode ser uma combinação linear de *spin up* e *spin down*, que podem ser descritos da seguinte maneira

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.49)$$

onde a e b são números complexos normalizados, satisfazendo $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Isso significa dizer que o qubit está numa superposição coerente dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ao mesmo tempo, ao contrário do bit clássico que pode ser somente 0 ou 1. Se realizarmos uma medida no qubit para conhecer seu estado, podemos encontrá-lo no estado $|0\rangle$ com probabilidade $|a|^2$ ou no estado $|1\rangle$ com probabilidade $|b|^2$. Ou seja, antes de realizar uma medida o qubit pode estar numa superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$, enquanto o bit clássico é bem definido, e está num estado 0 ou 1.

2.4.2 Sistemas de dois qubits

A partir da definição de um qubit, considere agora um sistema de dois qubits (A e B) com espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Na representação de Bloch, qualquer estado para esse sistema pode ser parametrizado como [70]:

$$\varrho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{y} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (2.50)$$

onde $\mathbb{1}^{AB}$ é a matriz identidade para o sistema composto, $\mathbb{1}^A$ e $\mathbb{1}^B$ são as matrizes identidade para os subsistemas A e B , respectivamente. $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as matrizes de Pauli. $\{\vec{x}, \vec{y}\} \in \mathbb{R}^3$ e t_{ij} são números reais que denotam os elementos na matriz de correlação T .

Na referência [71], Luo demonstrou que qualquer estado de dois qubits pode ser reduzido, por equivalência unitária local, para

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}^A \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma}^B + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right), \quad (2.51)$$

onde $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \in \mathbb{R}^3$ são vetores com norma menor que a unidade⁴. Dado que a pureza do estado $P(\rho) \equiv \text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{4}(1 + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$ é limitada superiormente pela unidade, temos que

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 \leq 3. \quad (2.52)$$

Todo estado de dois qubits pode então ser simplificado na sua forma normal através de transformações unitárias locais. Assim, podemos restringir nossa análise para matrizes densidades na forma (2.51) sem qualquer perda de generalidade, dado que esse tipo de transformação preserva emaranhamento e correlações em geral, por definição.

⁴Os detalhes dessa transformação são apresentados no apêndice A.

2.4.3 Estados X

Em algumas análises, um sistema de dois qubits geral pode ser muito complexo de ser analisado, devido ao número de parâmetros, de forma que se faz necessário em vários momentos recorrer a sistemas de dois qubits mais simples, que são facilmente implementáveis em experimentos. Nesse sentido, vamos utilizar estados conhecidos como *estados X* [72], os quais recebem este nome devido à forma de sua matriz densidade. Estados X podem ser definidos da seguinte maneira: seja ρ_{jj} os termos diagonais e $\rho_{jk} = |\rho_{jk}|e^{i\phi_{jk}}$ ($j < k$) os antidiagonais, com $\rho_{kj} = \rho_{jk}^*$, ou na sua forma matricial

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Para que represente um estado físico, a equação (2.53) deve satisfazer as condições de traço unitário, $\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} = 1$, e positividade, $\rho_{22}\rho_{33} \leq |\rho_{23}|^2$ e $\rho_{11}\rho_{44} \leq |\rho_{14}|^2$. Os estados X são emaranhados se, e somente se, $\rho_{22}\rho_{33} < |\rho_{14}|^2$ ou $\rho_{11}\rho_{44} < |\rho_{23}|^2$. A família de estados X incluem os estados puros de Bell, assim como estados de Werner [10].

Estados X de três parâmetros reais

Dos estados X apresentados acima (2.53), existe uma subclasse de estados conhecidos como estados X de três parâmetros reais. Na representação de Bloch, eles podem ser escritos a partir da equação (2.51), com \vec{a} e \vec{b} nulos, ou seja,

$$\rho_{\vec{c}} = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right). \quad (2.54)$$

A matriz densidade de um estado X de três parâmetros reais, na base computacional, pode ser escrita na forma

$$\rho_{\vec{c}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 0 & 1 + c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Os estados X de três parâmetros reais também são conhecidos como estados X com marginais maximamente misturadas. Isso se dá pelo fato de que se calcularmos os operadores densidade reduzidos para essa classe de estados obteremos estados maximamente misturados, ou seja, $\rho_A = \rho_B = \frac{\mathbb{1}}{2}$.

Desta forma, nós encerramos este capítulo de introdução aos conceitos fundamentais abordados na tese com a definição e propriedades do operador densidade em Mecânica Quântica, definição das medidas de correlações que estamos interessados, uma discussão sobre sistemas quânticos abertos e a apresentação do modelo que será utilizado ao longo da tese.

Quantificação de direcionamento EPR para sistemas de dois qubits

No capítulo 2 apresentamos diferentes quantificadores de correlações quânticas, a saber, não-localidade de Bell, emaranhamento e discórdia quântica. Recentemente, uma nova medida de correlação se juntou a esse quadro, a chamada *EPR steering* ou *direcionamento EPR*.

A noção de direcionamento EPR foi introduzida por Schrödinger em 1935 [7, 8], no contexto do paradoxo de Einstein-Podolski-Rosen (EPR), para nomear a habilidade de um observador afetar o estado de um sistema remoto através de medições locais. Especificamente, se Alice e Bob compartilham um estado emaranhado, realizando medições somente em sua parte do sistema, Alice pode remotamente orientar (“steer”) o estado de Bob. Isto não é possível se o estado compartilhado é somente correlacionado classicamente. Este tipo de correlação quântica é hoje conhecida como *direcionamento EPR*.

Um exemplo simples de direcionamento EPR pode ser dado da seguinte forma. Considere que Alice e Bob compartilham o estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_z|1\rangle_z + |1\rangle_z|0\rangle_z). \quad (3.1)$$

Suponha que Alice deseja realizar uma medida (local) de σ_z no seu subsistema. Com essa medida, Alice define a realidade de Bob, ou seja, se ela obtém um resultado $|0\rangle_z$ para sua

medida, o estado de Bob após a medição é $|1\rangle_z$, e vice-versa. Agora, suponha que Alice resolva medir σ_x . Fazendo uma mudança de base no subsistema da Alice, o estado total pode ser reescrito como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_x \left(\frac{|0\rangle_z + |1\rangle_z}{\sqrt{2}} \right) + |1\rangle_x \left(\frac{|0\rangle_z - |1\rangle_z}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Nesse caso, se a Alice realizar uma medida em σ_x , ela não define mais a realidade de Bob, ou seja, se ela obtém o resultado $|0\rangle_x$, o estado de Bob se torna $\frac{|0\rangle_z + |1\rangle_z}{\sqrt{2}}$, um estado que não tem realidade definida. Logo, o direcionamento EPR está baseado na habilidade de Alice em “orientar” o estado de Bob de acordo com a sua escolha de medida.

Recentemente, foi dado ao direcionamento EPR uma interpretação operacional num contexto no qual Alice quer persuadir Bob, que não confia nela, que eles compartilham um estado emaranhado [14, 15]. Neste cenário, estes trabalhos estabeleceram uma *hierarquia* segundo a qual direcionamento EPR está entre emaranhamento [61] e não-localidade de Bell [43], de forma que nem todo estado emaranhado é EPR direcionável e nem todo estado EPR direcionável é Bell não-local. Vamos reservar o capítulo 4 para uma discussão mais profunda sobre essa hierarquia no contexto de medidas projetivas.

A maioria dos trabalhos envolvendo direcionamento EPR diagnostica direcionalidade EPR pelo teste de condições necessárias, as quais são usualmente estabelecidas em termos de desigualdades. As contribuições de Reid [73] e Cavalcanti *et al* [16] definem um quadro seminal para esta abordagem. Desigualdades de direcionamento EPR baseadas em relações de incerteza entrópicas também foram propostas e experimentalmente testadas [74–76]. Outras ferramentas têm sido propostas para sinalizar direcionamento EPR, como por exemplo testemunhas de direcionamento EPR [77], desigualdade CHSH para direcionamento EPR [78, 79], e desigualdades geométricas do tipo Bell [80].

Apesar do vasto conhecimento acumulado até agora a respeito de testemunhas de direcionamento EPR, é notável que, ao contrário de não-localidade e emaranhamento, para os quais medidas simples existem pelo menos para alguns contextos particulares [55, 57, 81], a literatura é ainda escassa relativa à quantificação do grau de direcionalidade EPR de um dado estado quântico. Desenvolvimentos nesta linha consistem no peso de direcionamento EPR (*steering weight*) [82], cujo cálculo demanda o uso de programação semi-definida (assim como ocorre para o cálculo de robustez de direcionamento EPR

(*steering robustness*) [83]), e uma medida de direcionamento EPR para estados bipartidos Gaussianos arbitrários de sistemas de variáveis contínuas [84]. Em particular, não existe nenhuma fórmula fechada mesmo para o caso muito importante (e simples) envolvendo estados de dois qubits e poucas medições por sítio.

O objetivo deste capítulo é preencher esta lacuna. Considerando os cenários de duas e três medições, propomos quantificar direcionamento EPR baseados em desigualdades de direcionamento EPR bem estabelecidas na literatura. Além disso, vamos mostrar analiticamente as relações de hierarquia existentes entre emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell.

3.1 Modelos de localidade

Antes de demonstrarmos a desigualdade para direcionamento EPR, é instrutivo apontar as diferenças entre modelos de localidade que revelam correlações de diferentes níveis, ou seja, cada modelo é responsável por critérios para a não-localidade de Bell, direcionamento EPR e emaranhamento [10, 14, 15]. Para a discussão sobre esses diferentes modelos, vamos adotar a mesma estratégia que foi usada para demonstrar a não-localidade de Bell.

Novamente, suponha que você possui uma fonte que prepara um par de partículas e envia uma para Alice e outra para Bob, em laboratórios separados espacialmente. Escolhendo realizar em seu sistema uma medida x (y) dentre muitas possíveis, Alice (Bob) obtém resultado a (b). Realizando-se o experimento um número suficiente de vezes, pode-se determinar a distribuição de probabilidade conjunta $p(ab|xy)$. Em geral, tem-se que

$$p(ab|xy) \neq p(a|x)p(b|y), \quad (3.3)$$

implicando que os resultados obtidos em cada laboratório não são estatisticamente independentes entre si. Em modelos locais, busca-se a explicação de tais correlações pela interação entre os subsistemas durante a sua preparação.

Para um estado quântico ρ , a distribuição de probabilidade $p(ab|xy)$ é teoricamente

calculada pela relação

$$p(ab|xy) = \text{Tr}(x_a \otimes y_b \rho), \quad (3.4)$$

onde x_a e y_b são medidas projetivas realizadas nos subsistemas de Alice e Bob, respectivamente. Como os laboratórios de Alice e Bob estão separados espacialmente, pergunta-se se existem modelos estatísticos locais que sejam capazes de reproduzir a distribuição de probabilidade obtida por (3.4). Ou seja, se existe alguma teoria geral (e local) que explique as correlações entre os resultados obtidos por Alice e Bob através da introdução de *variáveis ocultas* λ , as quais seriam determinadas inicialmente durante a preparação e que possibilitariam a composição da probabilidade conjunta a partir de distribuições marginais locais, na forma

$$p(ab|xy) = \sum_{\lambda} p_{\lambda} p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda), \quad (3.5)$$

onde $\sum_{\lambda} p_{\lambda} = 1$. A hipótese de localidade se baseia no fato que $p(a|bxy, \lambda) = p(a|x, \lambda)$, ou seja, a distribuição marginal de Alice não depende do resultado b obtido por Bob, assim como da medição y realizada por ele, e de forma similar para a distribuição de Bob.

O valor esperado para as duas medições no sistema é dado por

$$\langle xy \rangle = \sum_{a,b} a b p(ab|xy), \quad (3.6)$$

de forma que o modelo de localidade implica que

$$\langle xy \rangle = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \left(\sum_a a p(a|x, \lambda) \right) \left(\sum_b b p(b|y, \lambda) \right) = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \langle x \rangle_{\lambda} \langle y \rangle_{\lambda}. \quad (3.7)$$

Esse resultado mostra que a média conjunta pode ser construída através de médias locais, resultado que é usado para obtenção de critérios (desigualdades) para o modelo de localidade a partir de resultados experimentais.

Neste contexto, é possível identificar três cenários diferentes a partir de restrições do modelo de localidade apresentado acima. Esses cenários são identificados com a não-

localidade de Bell, direcionamento EPR e emaranhamento¹.

3.1.1 Não-localidade de Bell

A discussão envolvendo não-localidade de Bell já foi apresentada na subseção 2.2.2, mas é interessante reapresentá-la nesse ponto considerando as possíveis restrições ao modelo de localidade. Nesse caso, se é concedida generalidade total ao modelo (3.5), ou seja, se não houver nenhuma restrição sobre $p(a|x, \lambda)$ ou $p(b|y, \lambda)$, o modelo de localidade é identificado como *modelo local de variáveis ocultas*, ou como modelo de localidade de Bell. Se não for possível encontrar estados λ que tornem a descrição (3.5) viável, então o estado é chamado de *Bell não-local*.

3.1.2 Direcionamento EPR

Se é imposta a restrição que

$$p(b|y, \lambda) = \text{Tr}_B[y_b \rho_\lambda^B], \quad (3.8)$$

temos um modelo de localidade conhecido como *modelo local de estados ocultos* (*local hidden state model*). Essa restrição implica que a marginal de Bob é consistente com um estado quântico oculto local ρ_λ^B , onde y_b denota um projetor tal que $y = \sum_b b y_b$ e $\sum_b y_b = \mathbb{1}$. A distribuição de probabilidade $p(ab|xy)$ é, então, dada por

$$p(ab|xy) = \sum_\lambda p_\lambda p(a|x, \lambda) \left(\text{Tr}_B[y_b \rho_\lambda^B] \right). \quad (3.9)$$

Se não for possível encontrar estados λ e ρ_λ^B que tornem a distribuição de probabilidade (3.5) viável, então o estado do sistema é chamado de EPR direcionável. Nesse caso, Alice pode manipular a realidade de Bob à distância, através de medidas locais.

¹A conexão com a discórdia quântica dentro desse contexto será explorada no próximo capítulo.

3.1.3 Emaranhamento

Se, por outro lado, demandarmos que

$$p(a|x, \lambda) = \text{Tr}_A[x_a \rho_\lambda^A] \quad \text{e} \quad p(b|y, \lambda) = \text{Tr}_B[y_b \rho_\lambda^B], \quad (3.10)$$

teremos um *modelo separável*. Nesse caso, procuramos modelos em que ambas as marginais sejam consistentes com estados quânticos. Dessa forma, reescrevendo (3.5), temos que

$$\begin{aligned} p(ab|xy) &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \left(\text{Tr}_A[x_a \rho_{\lambda}^A] \right) \left(\text{Tr}_B[y_b \rho_{\lambda}^B] \right) \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{Tr}[(x_a \otimes y_b) \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B] \\ &= \text{Tr}[(x_a \otimes y_b) \varrho], \end{aligned} \quad (3.11)$$

com $\varrho = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B$. Note que o estado quântico ϱ necessário para que a distribuição de probabilidade represente um modelo separável é exatamente o mesmo que é usado para a definição de separabilidade de estados quânticos (emaranhamento nulo), como era esperado.

3.1.4 Hierarquia entre não-localidade de Bell, direcionamento EPR e emaranhamento

Considerando os diferentes modelos de localidade apresentados acima, é possível formular uma noção de hierarquia. Se um modelo violar (3.5) sem qualquer restrição, então não poderá satisfazer tal condição se for mais restrito, ou seja, com as restrições impostas em (3.9) e (3.11). Assim, todo estado que apresente não-localidade ($N > 0$), terá direcionamento EPR ($\mathcal{D} > 0$) e emaranhamento ($E > 0$). Porém, se não violar (3.5) sem restrição, mas violá-la com, por exemplo, a restrição (3.9), então temos um estado de Bell local, mas que é EPR direcionável e, consequentemente, emaranhado. Essa característica pode ser denotada na seguinte hierarquia

$$N \triangleright \mathcal{D} \triangleright E, \quad (3.12)$$

que indica que todo estado Bell não-local é também EPR direcionável, e todo estado EPR direcionável é necessariamente emaranhado. Porém, um estado emaranhado, que viola (3.11), pode ser Bell local e EPR não-direcionável (não viola (3.5) e (3.9)). Investigaremos essa hierarquia para estados gerais de dois qubits na seção de resultados deste capítulo.

3.2 Critério experimental para direcionamento EPR

Emaranhamento e não-localidade de Bell possuem diversos critérios que são utilizados para sua detecção, como mostramos no capítulo 2. Resta agora determinar também um critério para a detecção de direcionamento EPR.

Dentre as propostas de critérios para detecção de direcionamento EPR citadas em [16], existe uma que é de particular interesse, dado que podemos aplicá-la facilmente para sistemas de dois qubits, e está relacionada à relação de incerteza entre observáveis de spin. Considere a restrição quântica para os valores esperados de observáveis de spin-1/2, $\langle J_\theta \rangle_\rho \leq \frac{1}{2}$. Com $J_\theta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x + J_y)$, que é o observável correspondendo à projeção do spin numa direção em $\theta = 45^\circ$ entre \vec{x} e \vec{y} , obtém-se que, para qualquer estado quântico ρ ,

$$\langle J_x \rangle_\rho + \langle J_y \rangle_\rho \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.13)$$

Agora também deve ser o caso que, para um par de observáveis J_x^B, J_y^B para Bob e J_x^A, J_y^A para Alice, onde $\alpha_i \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ representam os valores possíveis para os resultados do observável J_i^A (as variáveis ocultas num modelo de localidade),

$$\alpha_x \langle J_x^B \rangle_\rho + \alpha_y \langle J_y^B \rangle_\rho \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (3.14)$$

para todos os valores de α_x, α_y . No laboratório, em princípio, conseguimos medir a quantidade $\langle J_x^A J_x^B \rangle + \langle J_y^A J_y^B \rangle$. Se assumirmos que essa quantidade pode ser descrita por um modelo local de estados ocultos (3.9), então podemos associar seu limite com a

equação (3.14), obtendo

$$\langle J_x^A J_x^B \rangle + \langle J_y^A J_y^B \rangle \leq \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3.15)$$

Seguindo um procedimento similar, agora para $\alpha_x \langle J_x^B \rangle_\rho + \alpha_x \langle J_x^B \rangle_\rho \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}$, que é válida pela mesma razão da equação (3.14), podemos derivar a desigualdade $\langle J_x^A J_x^B \rangle + \langle J_y^A J_y^B \rangle \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Essas duas desigualdades podem ser resumidas no seguinte critério de direcionamento EPR,

$$|\langle J_x^A J_x^B \rangle + \langle J_y^A J_y^B \rangle| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3.16)$$

Uma desigualdade mais geral pode ser derivada a partir da restrição análoga para três observáveis

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \alpha_x \langle J_x \rangle_\rho + \alpha_y \langle J_y \rangle_\rho + \alpha_z \langle J_z \rangle_\rho \leq \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (3.17)$$

que segue, como a equação (3.14), do fato que $\hat{J}_\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{J}_x + \hat{J}_y + \hat{J}_z)$ é outro observável correspondendo à projeção de spin. A partir da equação (3.17) podemos derivar o seguinte critério de direcionamento EPR,

$$|\langle J_x^A J_x^B \rangle + \langle J_y^A J_y^B \rangle + \langle J_z^A J_z^B \rangle| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (3.18)$$

Agora podemos unificar as desigualdades acima para o caso da medição de n observáveis nos laboratórios de Alice e Bob, com $n = 2, 3$. Para isso, usamos a relação envolvendo o operador de projeção de spin com os operadores de Pauli, $\vec{J} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, com $\hbar = 1$. Esta desigualdade, proposta por Cavalcanti, Jones, Wiseman e Reid [16], é composta de uma soma finita de valores esperados:

$$F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=1}^n \langle A_i \otimes B_i \rangle \right| \leq 1, \quad (3.19)$$

onde $A_i = \hat{u}_i \cdot \vec{\sigma}$, $B_i = \hat{v}_i \cdot \vec{\sigma}$, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é um vetor composto pelas matrizes de Pauli, $\hat{u}_i \in \mathbb{R}^3$ são vetores unitários, $\hat{v}_i \in \mathbb{R}^3$ são vetores ortogonais unitários, $\mu = \{\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ é o conjunto de direções de medida, $\langle A_i \otimes B_i \rangle = \text{Tr}(\rho A_i \otimes B_i)$, e

$\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é algum estado quântico bipartido.

3.3 Desigualdade CHSH para direcionamento EPR

Mais recentemente, Cavalcanti *et al* [78] consideraram um cenário no qual Alice realiza duas medidas dicotômicas enquanto Bob realiza duas medidas nas bases de observáveis maximamente incompatíveis². A partir de uma matriz de correlação envolvendo as probabilidades conjuntas dos resultados de medições realizadas no laboratório de Alice e Bob, esses autores derivaram a seguinte desigualdade CHSH para direcionamento EPR:

$$F_2^{\text{CHSH}}(\rho, \mu) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{f_+(\rho, \mu)} + \sqrt{f_-(\rho, \mu)} \right] \leq 1, \quad (3.20)$$

onde $f_{\pm}(\rho, \mu) = \langle (A_1 \pm A_2) \otimes B_1 \rangle^2 + \langle (A_1 \pm A_2) \otimes B_2 \rangle^2$. Foi mostrado que o máximo valor que a função $2F_2^{\text{CHSH}}(\rho, \mu)$ pode alcançar é $2\sqrt{2}$, o qual corresponde ao limite de Cirel'son [79] (o mesmo limite que é obtido para a violação máxima das desigualdades de Bell).

3.4 Quantificador de direcionamento EPR

As desigualdades citadas acima podem ser representadas na forma $F_n(\rho, \mu) \leq 1$, onde F_n é alguma função de valor real, μ é um conjunto de medidas, e ρ é um estado bipartido. Violações dessas desigualdades implicam que ρ é EPR direcionável para algum μ , mas não indicam a quantidade de direcionamento EPR que este estado possui.

Nossa proposta é quantificar o grau de direcionalidade EPR de um dado estado, considerando a quantidade pela qual uma desigualdade de direcionamento EPR é maximamente violada, usando o mesmo argumento apresentado para os quantificadores da não-localidade de Bell no capítulo 2. Neste sentido, nossa abordagem é também intuitivamente relacionada à noção de robustez de direcionamento EPR [83]. Propomos então

²Do termo em inglês *mutually unbiased basis*. Bases mutuamente neutras, ou maximamente incompatíveis, são duas bases ortonormais tal que o quadrado do produto interno entre quaisquer estados da base é igual ao inverso da dimensão do espaço de Hilbert correspondente. Isso significa que se um sistema é preparado num estado pertencendo a uma das bases, então todos os resultados de medida com respeito à outra irão ocorrer com probabilidades iguais [85].

a seguinte medida de direcionamento EPR para um estado ρ :

$$\mathcal{D}_n(\rho) := \max \left\{ 0, \frac{F_n(\rho) - 1}{F_n^{\max} - 1} \right\}, \quad (3.21)$$

onde

$$F_n(\rho) = \max_{\mu} F_n(\rho, \mu) \quad (3.22)$$

e $F_n^{\max} = \max_{\rho} F_n(\rho)$. O fator de normalização $F_n^{\max} - 1$ foi introduzido para que se tenha $\mathcal{D}_n(\rho) \in [0, 1]$. A maximização interna é feita sobre todos os conjuntos de medida μ , enquanto que a externa seleciona valores máximos que são maiores que 1 para um dado ρ . A equação (3.21) dá uma medida operacional intuitiva de direcionamento EPR, mas esta formulação ainda é matematicamente difícil devido às maximizações necessárias. Apesar disso, mostramos que resultados analíticos podem ser obtidos para *qualquer* estado de dois qubits.

3.5 Resultados

Vamos então construir medidas de direcionamento EPR de acordo com a prescrição (3.21). Começamos pela maximização de $F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu)$ dada na desigualdade (3.19). Usando o estado geral de dois qubits (2.51), obtemos os seguintes valores esperados:

$$\langle \hat{u}_i \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{v}_i \cdot \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}[(\hat{u}_i \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{v}_i \cdot \vec{\sigma})\rho] = \sum_{r=1}^3 u_{ir} c_r v_{ir} \equiv \langle u_i | C | v_i \rangle \equiv C_i, \quad (3.23)$$

onde $C \equiv \sum_r c_r |e_r\rangle\langle e_r|$ é um operador Hermitiano com autovalores c_r , $\hat{u}_i = |u_i\rangle = \sum_r u_{ir} |e_r\rangle$, e $\hat{v}_i = |v_i\rangle = \sum_r v_{ir} |e_r\rangle$. Por conveniência, adotamos a notação bra-ket para os vetores $\{\hat{u}_i, \hat{v}_i\}$. Note que F_n^{CJWR} não irá depender nem de \vec{a} ou \vec{b} . Definimos

$$|\alpha_i\rangle \equiv C |u_i\rangle, \quad (3.24)$$

tal que $C_i = \langle \alpha_i | v_i \rangle$. Esta superposição é limitada superiormente pela norma $\alpha_i = \sqrt{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle}$ do vetor $|\alpha_i\rangle$. Visando a maximização de

$$F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) = \frac{|\sum_i C_i|}{\sqrt{n}} \quad (3.25)$$

exigimos que todos os vetores $|\alpha_i\rangle$ e $|v_i\rangle$ sejam paralelos, isto é,

$$|\alpha_i\rangle = \alpha_i |v_i\rangle. \quad (3.26)$$

Isto sempre pode ser feito, como vamos descrever abaixo. A condição de ortonormalidade $\langle v_j | v_i \rangle = \delta_{ij}$ nos dá $\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle = \alpha_i^2 \delta_{ij}$ e $\langle \alpha_j | v_i \rangle = \alpha_i \delta_{ij}$. Definindo $|\alpha\rangle \equiv \sum_i |\alpha_i\rangle$ e $|v\rangle \equiv \sum_i |v_i\rangle$, obtemos que $\langle \alpha | v \rangle = \sum_i \langle \alpha_i | v_i \rangle$. Este produto interno é então um limite superior para $\sum_i C_i$. Consequentemente,

$$F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_i \langle \alpha_i | v_i \rangle \right| \leq \frac{|\langle \alpha | v \rangle|}{\sqrt{n}}. \quad (3.27)$$

Para encontrar o limite superior máximo impomos que os vetores $|\alpha\rangle$ e $|v\rangle$ sejam paralelos, isto é,

$$\frac{|\alpha\rangle}{\alpha} = \frac{|v\rangle}{v}, \quad (3.28)$$

onde $\alpha = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$ e $v = \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{n}$ (pela ortonormalidade de $\{|v_i\rangle\}$). Com isso,

$$F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) \leq \alpha, \quad (3.29)$$

onde

$$\alpha^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i | C^2 | u_i \rangle. \quad (3.30)$$

Para determinar α , notamos primeiro, pelas equações (3.24) e (3.26), que

$$\frac{C|u_i\rangle}{\sqrt{\langle u_i | C^2 | u_i \rangle}} = |v_i\rangle. \quad (3.31)$$

A ortonormalidade de $\{|v_i\rangle\}$ implica que a escolha (3.26) sempre será possível, em particular se $\langle u_j|C^2|u_i\rangle = \alpha_i^2 \delta_{ij}$. Este resultado requer que $|u_i\rangle$ seja um autoestado de C^2 com autovalor $\alpha_i^2 = c_i^2$. Segue, portanto, que α^2 será máxima se escolhermos os vetores $|u_i\rangle$ que dão os maiores autovalores de C . Com isso, finalmente obtemos os valores máximos

$$F_2^{\text{CJWR}}(\rho) = \sqrt{c^2 - c_{\min}^2} \quad \text{e} \quad F_3^{\text{CJWR}}(\rho) = c, \quad (3.32)$$

onde $c = \sqrt{\bar{c}^2}$ e $c_{\min} \equiv \min\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

É digno de nota que esses valores máximos são estritos. Para mostrar isso, começamos com a equação (3.25) e usamos $|\sum_i C_i| \leq \sum_i |C_i|$, onde $C_i = \langle \alpha_i | v_i \rangle$. Pela desigualdade Cauchy-Schwarz temos que $|\langle \alpha_i | v_i \rangle|^2 \leq \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = \alpha_i^2$. Agora, como $(\alpha_i - \alpha_j)^2 \geq 0$, o que implica em $2\alpha_i \alpha_j \leq \alpha_i^2 + \alpha_j^2$, tem-se que

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 = \sum_i \alpha_i^2 + 2 \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j \leq n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \quad (3.33)$$

sendo que a igualdade vale somente se todos os α_i são iguais. Até agora estabelecemos as seguintes desigualdades estritas:

$$F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_i \langle \alpha_i | v_i \rangle \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i \alpha_i \leq \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}. \quad (3.34)$$

Pode-se notar imediatamente que a suposição (3.26) satura a primeira desigualdade da cadeia (3.34). Por sua vez, a suposição (3.28), que significa

$$\sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha} |v_i\rangle = \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}} |v_i\rangle, \quad (3.35)$$

implica em $\alpha_i \sqrt{n} = \alpha$ para todo i . É fácil notar que esta relação satura a última desigualdade da cadeia (3.34) e dá $\max_{\mu} F_n^{\text{CJWR}}(\rho, \mu) = \alpha$, em total concordância com (3.29) e (3.32).

Agora seguimos para a maximização de $F_2^{\text{CHSH}}(\rho, \mu)$ dada na desigualdade (3.20). Pela equação (3.23), tem-se $\langle A_i \otimes B_j \rangle = \langle u_i | C | v_j \rangle$, da qual segue que

$$f_{\pm} = (\langle u_1 | C | v_1 \rangle \pm \langle u_2 | C | v_1 \rangle)^2 + (\langle u_1 | C | v_2 \rangle \pm \langle u_2 | C | v_2 \rangle)^2.$$

Como $\langle A_i \otimes B_j \rangle$ são reais e $\sum_{i=1}^2 |v_i\rangle\langle v_i| = \mathbb{1}$, temos

$$\begin{aligned} f_{\pm} &= (\langle u_1|C|v_1\rangle\langle v_1|C|u_1\rangle + \langle u_2|C|v_1\rangle\langle v_1|C|u_2\rangle \pm 2\langle u_1|C|v_1\rangle\langle v_1|C|u_2\rangle) \\ &\quad + (\langle u_1|C|v_2\rangle\langle v_2|C|u_1\rangle + \langle u_2|C|v_2\rangle\langle v_2|C|u_2\rangle \pm 2\langle u_1|C|v_2\rangle\langle v_2|C|u_2\rangle) \\ &= \langle u_1|C^2|u_1\rangle + \langle u_2|C^2|u_2\rangle \pm 2\langle u_1|C^2|u_2\rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Definindo novamente $|\alpha_i\rangle \equiv C|u_i\rangle$, podemos escrever

$$f_{\pm} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \pm 2\alpha_1\alpha_2 \cos \theta, \quad (3.37)$$

sendo θ a separação angular entre $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$. Para $\alpha_{1,2}$ fixos, a maximização sobre θ dá

$$\frac{1}{2} (\sqrt{f_+} + \sqrt{f_-}) \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

O limite superior, o qual ocorre para $\theta = \pi/2$, sempre pode ser alcançado pela escolha $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ de forma a verificar $\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = 0$. Neste caso, podemos definir novamente $|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^2 |\alpha_i\rangle$ e reduzir o lado direito da equação da desigualdade acima para $\alpha = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$, a qual pode ser escrita como na equação (3.30). Assim, obtemos $F_2^{\text{CHSH}}(\rho, \mu) \leq \alpha$. Agora se torna óbvio que chegamos precisamente no mesmo problema de otimização definido pelas equações (3.29) e (3.30) com $n = 2$. Concluimos então que

$$F_2^{\text{CHSH}}(\rho) = \sqrt{c^2 - c_{\min}^2} = F_2^{\text{CJWR}}(\rho). \quad (3.38)$$

Para determinar F_n^{\max} , pode-se usar a desigualdade (2.52) com $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 0$ e o fato que $|c_i| \leq 1$ para obter que $\max_{\rho} F_n^{\text{CJWR}}(\rho) = \sqrt{n}$. Assim, voltamos para a equação (3.21) para encontrar nossa fórmula final para direcionamento EPR de dois qubits:

$$\mathcal{D}_n(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{\Lambda_n - 1}{\sqrt{n} - 1} \right\}, \quad (3.39)$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{c^2 - c_{\min}^2}, \quad \Lambda_3 = c,$$

a qual vale para qualquer estado de dois qubits na forma (2.51) em configurações envolvendo $n = 2, 3$ medidas por sítio. Note que $\mathcal{D}_n(\rho)$ não depende de \vec{a} e \vec{b} . Nossos resultados mostram que a proposta de quantificar direcionamento EPR via máxima viola-

ção unifica as noções de direcionamento EPR derivadas de desigualdades que são *a priori* muito diferentes, como (3.19) e (3.20). Esses resultados são importantes pois conseguimos encontrar fórmulas fechadas para a detecção de direcionamento EPR para sistemas gerais de dois qubits envolvendo duas e três medições por sítio. Poucas propostas na literatura propõem quantificadores de direcionamento EPR, e nenhuma delas havia encontrado fórmulas simples e fechadas para os casos que apresentamos aqui.

Numericamente, em testes para 10^5 configurações de μ geradas aleatoriamente, para diferentes estados iniciais, (3.32) e (3.38) são de fato valores máximos estritos para suas correspondentes $F_n(\rho, \mu)$, como podemos visualizar na figura 3.1.

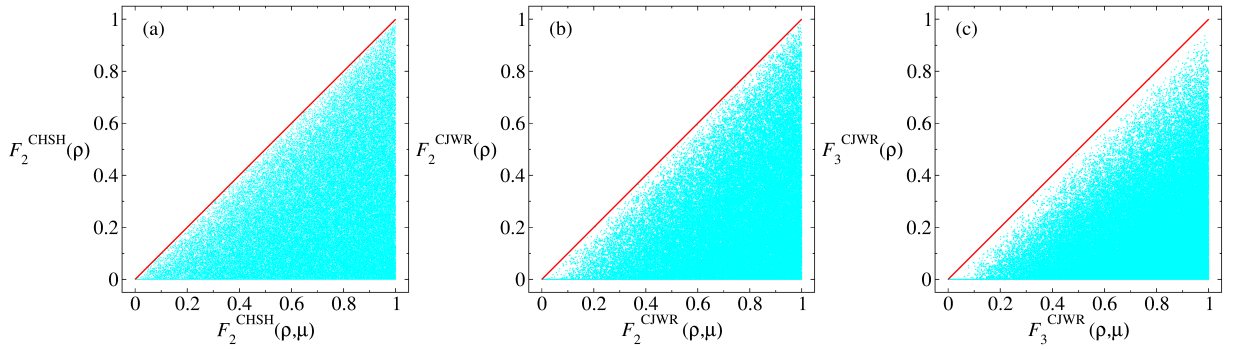


Figura 3.1: Comparação numérica de $F_n(\rho)$ (eixo vertical) com $F_n(\rho, \mu)$ (eixo horizontal), com ambas as funções devidamente normalizadas, para 10^5 configurações μ geradas aleatoriamente mostrando que a primeira é de fato um limite superior para a segunda. A linha vermelha representa a situação quando $F_n(\rho) = F_n(\rho, \mu)$.

3.6 Emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade

A partir dos quantificadores para direcionamento EPR (3.39) obtidos acima, estamos aptos a descobrir qual hierarquia existe entre nossos quantificadores de direcionamento EPR e quantificadores apropriados de emaranhamento e não-localidade.

Vamos utilizar o quantificador de não-localidade de Bell CHSH (2.23), apresentado no capítulo 2. Horodecki *et al* [81] derivaram uma condição necessária e suficiente para a violação desta desigualdade para estados mistos de spin-1/2 genéricos. Definindo uma

quantidade não-negativa M_{T_ϱ} como uma função da matriz T_ϱ com elementos $t_{ij} = \text{Tr}(\varrho \sigma_i \otimes \sigma_j)$, onde ϱ é dado por (2.50) e mostrando que

$$B(\varrho) := \max_{\mu} B(\varrho, \mu) = 2\sqrt{M_{T_\varrho}}, \quad (3.40)$$

onde o máximo é tomado sobre todas as configurações de medida $\mu = \{\hat{a}_{1,2}, \hat{b}_{1,2}\}$. A desigualdade de Bell CHSH será violada por ϱ se, e somente se, $M_{T_\varrho} > 1$. De particular importância aqui é o fato que, para uma matriz simétrica T_ϱ , $M_{T_\varrho} = t_1^2 + t_2^2$, onde $|t_1| \geq |t_2| \geq |t_3|$ são os autovalores de T_ϱ . Por comparação direta do estado (2.51) com o estado (2.50), inferimos que $T_\rho \doteq \{c_1, c_2, c_3\}$ (uma matriz diagonal), a qual implica que $M_{T_\rho} = c^2 - c_{\min}^2$. Agora, seguindo o raciocínio da seção anterior e inspirados pelos resultados apresentados na referência [86], definimos nosso quantificador de não-localidade de Bell aplicando o resultado acima em (2.23), obtendo

$$N(\rho) = \max \left\{ 0, \frac{\sqrt{c^2 - c_{\min}^2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right\}, \quad (3.41)$$

que é exatamente igual a $\mathcal{D}_2(\rho)$. Isso mostra que, dados os quantificadores derivados no presente contexto, as noções de direcionamento EPR e não-localidade de Bell se tornam indistinguíveis no cenário de duas medições.

Vamos comparar $N(\rho)$ com $\mathcal{D}_3(\rho)$. A partir das equações (3.41) e (3.39) é fácil ver que essas correlações estarão presentes se, e somente se, $c^2 > 1 + c_{\min}^2$ e $c^2 > 1$, respectivamente. Temos que, como a primeira desigualdade implica na segunda, todos os estado CHSH-não-locais serão necessariamente EPR direcionáveis (simbolicamente, $N_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_3$). Entretanto, nem todo estado que é EPR direcionável no cenário de três medições será no de duas medições e CHSH-não-local.

Para a comparação com emaranhamento, usaremos a *concorrência* (2.31). No que segue, iremos empregar um resultado muito útil, recentemente provado por Jafarpour e Sabour [87], segundo o qual a concorrência de qualquer estado de dois qubits é limitada inferiormente pela concorrência de um estado X relacionado (2.53). A concorrência de tal estado pode ser escrita como [72]

$$E(\rho_X) = 2 \max \{0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\}, \quad (3.42)$$

onde usamos a letra E como referência a emaranhamento. Aplicando a transformação unitária *local* $U \equiv U_+ \otimes U_-$, com $U_{\pm} = e^{-i\phi_{\pm}\sigma_3}$ e $\phi_{\pm} = \frac{1}{4}(\phi_{14} \pm \phi_{23})$, encontra-se um estado X de cinco parâmetros na forma

$$U\rho_X U^\dagger \doteq \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & |\rho_{14}| \\ 0 & \rho_{22} & |\rho_{23}| & 0 \\ 0 & |\rho_{23}| & \rho_{33} & 0 \\ |\rho_{14}| & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

O estado X (3.43) pode ser parametrizado como em (2.51) pela escolha apropriada dos elementos de matriz como $\rho_{jk} = \rho_{jk}(a_3, b_3, \vec{c})$. Assim, com uma transformação local que preserva cada correlação quântica Q , qualquer estado X pode ser escrito na forma (2.51), com $a_{1,2} = b_{1,2} = 0$. Formalmente, $Q(\rho_X) = Q(\rho(a_3, b_3, \vec{c}))$. O resultado Jafarpour-Sabour [87] implica que

$$E(\rho(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})) \geq E(\rho(a_3, b_3, \vec{c})), \quad (3.44)$$

o qual indica que o emaranhamento de qualquer estado de dois qubits $\rho(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é limitado inferiormente pela concorrência do estado X $\rho(a_3, b_3, \vec{c})$ associado. Usando a fórmula (3.42), podemos mostrar que o emaranhamento de $\rho(a_3, b_3, \vec{c})$ pode ser escrito como $E(\rho(a_3, b_3, \vec{c})) = \frac{1}{2} \max\{0, \chi_+, \chi_-\}$, onde $\chi_{\pm} \equiv |c_1 \pm c_2| - [(1 \pm c_3)^2 - (a_3 \pm b_3)^2]^{1/2}$. A partir do fato que $(a_3 \pm b_3)^2$ é sempre positivo, segue que

$$E(\rho(a_3, b_3, \vec{c})) \geq E(\rho_{\vec{c}}), \quad (3.45)$$

onde $\rho_{\vec{c}}$ é dado pela equação (2.55) com a_3 e b_3 nulos. Seja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ o conjunto de autovalores de $\rho_{\vec{c}}$. Reescrevendo χ_{\pm} em termos do maior autovalor (λ_1), temos que

$$E(\rho_{\vec{c}}) = \max\{0, \mathfrak{e}\}, \quad \mathfrak{e} = 2\lambda_1 - 1. \quad (3.46)$$

Por sua vez, \mathcal{D}_3 pode ser escrito em termos da pureza $P = \sum_i \lambda_i^2$ de $\rho_{\vec{c}}$ como

$$\mathcal{D}_3(\rho_{\vec{c}}) = \max\{0, \mathfrak{s}\}, \quad \mathfrak{s} = \frac{\sqrt{4P - 1} - 1}{\sqrt{3} - 1}. \quad (3.47)$$

Para provar que não separabilidade é uma condição necessária para direcionalidade EPR, usamos o fato que $(\sum_{i>1} \lambda_i)^2 \geq \sum_{i>1} \lambda_i^2$. Dado que

$$P = \lambda_1^2 + \sum_{i>1} \lambda_i^2 \quad \text{e} \quad \lambda_1 + \sum_{i>1} \lambda_i = 1, \quad (3.48)$$

podemos reescrever essa desigualdade como $P + 2(\lambda_1 - \lambda_1^2) \leq 1$. Como $\epsilon = 2\lambda_1 - 1$, segue que $\epsilon \geq \sqrt{2P - 1}$. Usando essa desigualdade e a da equação (3.47) vemos que para obter $\mathcal{D}_3 > 0$, o qual requer $P > \frac{1}{2}$, é necessário que $E = \epsilon > 0$, o que prova o ponto.

O fato de que emaranhamento pode existir sem direcionamento EPR pode ser mostrado usando $c_i = -w$ com $w \in [0, 1]$, de forma que $\rho_{\vec{c}}$ é reduzido para um estado de Werner 2×2 [10]. Cálculos explícitos dão $\lambda_1 = (1 + 3u)/4$ e $P = (1 + 3u^2)/4$. Consequentemente,

$$\epsilon = \frac{3u - 1}{2} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \frac{u\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}. \quad (3.49)$$

Vemos que enquanto direcionamento EPR somente aparece para $u > 1/\sqrt{3}$, o que está em completa concordância com resultados reportados previamente [82], emaranhamento já está presente para $u > 1/3$. Invertendo a equação (3.47), obtemos $P = P(\mathfrak{s})$ e, como $\epsilon \geq \sqrt{2P - 1}$, concluímos que

$$E(\rho_{\vec{c}}) \geq \mathcal{D}_3(\rho_{\vec{c}}). \quad (3.50)$$

Pelas relações (3.44), (3.45), e (3.50), estabelecemos que

$$E(\rho) \geq \mathcal{D}_3(\rho) \quad (3.51)$$

para qualquer estado de dois qubits escrito na forma (2.51), o que implica em $\mathcal{D}_3 \Rightarrow E$. Apesar da desigualdade (3.51) não valer para outras medidas de emaranhamento e direcionamento EPR, uma hierarquia equivalente a $\mathcal{D}_3 \Rightarrow E$ ainda existirá se tais medidas forem funções monotônicas da concorrência e de \mathcal{D}_3 . Com isso, concluímos que para todo o conjunto de estados de dois qubits vale que

$$N_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_3 \Rightarrow E, \quad (3.52)$$

implicando numa hierarquia em que todos os estados CHSH-não-locais são EPR direcionáveis e todos os estados EPR direcionáveis são emaranhados [14]. No próximo capítulo iremos abordar a análise numérica dos resultados apresentados acima.

A partir do resultado $\mathcal{D}_2(\rho) = N_2(\rho)$, a questão que aparece é se \mathcal{D}_3 também seria equivalente a uma medida da não-localidade de Bell envolvendo *três* medidas dicotômicas por sítio. Para provar esta afirmação, é suficiente focar nos estados de Werner acima citados (estados com $c_i = -w$). Faremos essa análise utilizando a medida de não-localidade baseada na desigualdade de Bell I_{3322} , chamada N_3 (2.25). Cálculos diretos levam a

$$p(A_i B_j) = \frac{1}{4}(1 - w \hat{u}_i \cdot \hat{v}_j) \quad \text{e} \quad p(A_k) = \frac{1}{2}. \quad (3.53)$$

A partir de $(\vec{u}_i - \vec{v}_j)^2 \geq 0$ encontramos a desigualdade $\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j \leq \frac{1}{2}(\vec{u}_i^2 + \vec{v}_j^2)$, com a qual pode-se mostrar que $I_{3322} \leq \frac{5w}{4} - 1$. Então, para estados de Werner 2×2 , temos a seguinte medida normalizada da não-localidade de Bell-3322:

$$N_3(\rho_w) = \max \{0, 5w - 4\}. \quad (3.54)$$

De acordo com a equação (3.39),

$$\mathcal{D}_3(\rho_w) = \max \left\{ 0, \frac{w\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \right\}, \quad (3.55)$$

a qual explicitamente mostra que \mathcal{D}_3 e N_3 não são equivalentes. Ao fim, por inspeção direta dos resultados analíticos para ρ_w , verificamos que $N_3 \Rightarrow N_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_3 \Rightarrow E$ para todos os estados de Werner 2×2 . Claramente, a hierarquia esperada também é satisfeita por N_3 .

Neste capítulo, olhando somente para a quantidade máxima pela qual algumas desigualdades de direcionamento EPR são violadas, derivamos fórmulas fechadas para quantificar direcionamento EPR de qualquer estado de dois qubits da forma (2.51) num cenário de duas e três medições por sítio. Ao verificar a hierarquia esperada entre emaranhamento–direcionamento EPR–não-localidade, nossas medidas reproduzem resultados previamente reportados. Uma questão em aberto é se nossa estratégia, assim como a robustez de direcionamento EPR [83] e o peso de direcionamento EPR [82], poderão levar a qualquer tipo

de *anomalia*³ [88] para estados bipartidos de dimensão maiores. No caso afirmativo, seria interessante testar outras propostas, como por exemplo calcular direcionamento EPR olhando para o volume de violações no espaço de parâmetros [46]. Todos os resultados apresentados neste capítulo foram publicados recentemente em [89].

³Anomalia é um fenômeno que acontece quando comparamos duas medidas e enquanto para uma delas encontramos seu valor máximo para determinado estado, a outra medida não é máxima para o mesmo estado. Uma definição formal desse fenômeno é feita no próximo capítulo.

Capítulo 4

Hierarquia de recursos quânticos e cronologia de mortes e ressurgimentos

No capítulo 2 apresentamos diferentes quantificadores de correlações quânticas, não-localidade de Bell, emaranhamento e discórdia quântica, e acrescentamos a esse quadro o direcionamento EPR, apresentando uma fórmula fechada para a sua quantificação no capítulo anterior. Neste capítulo, vamos estender a análise de hierarquia feita no capítulo 3 num cenário mais amplo, ou seja, vamos incluir nas nossas investigações a discórdia quântica, assim como a introdução de canais de ruído para observar se essa hierarquia se mantém quando os estados iniciais estão sujeitos a uma dinâmica descoerente.

Vamos introduzir neste capítulo um elemento essencial para a discussão da hierarquia através da formulação de diagramas de recursos e cronologias de mortes súbitas das correlações quânticas citadas acima quando sujeitas a canais de ruído. Nosso trabalho foca na análise de estados X de dois qubits (2.55) e, através de resultados analíticos e numéricos, podemos obter conclusões concretas envolvendo hierarquia e robustez sob canais de ruído.

4.1 Hierarquia e cronologia em diagramas $Q_2 \times Q_1$

Considere duas medidas diferentes de recursos quânticos, Q_1 e Q_2 , normalizadas no intervalo real $[0, 1]$. (Q_1, Q_2) podem assumir qualquer uma das medidas de correlações quânticas sob análise (discórdia, emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade).

Seja uma classe de estados ρ_λ , parametrizados por um conjunto λ de parâmetros. Cada estado ρ_λ corresponde a um ponto $(Q_1(\rho_\lambda), Q_2(\rho_\lambda))$ em um *diagrama de recursos* $Q_2 \times Q_1$. Tipicamente, estados físicos são tais que λ é denso, tal que o conjunto de pontos no diagrama forma uma região que é compacta e conexa (veja a área preenchida na figura 4.1). Vamos introduzir nossa noção de *hierarquia* entre duas medidas de quantidade (recursos quânticos) em termos do diagrama $Q_2 \times Q_1$ retratado na figura 4.1.

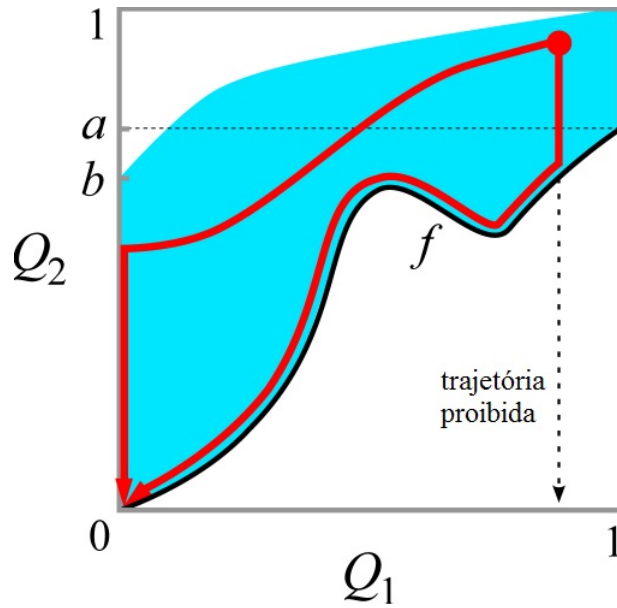


Figura 4.1: Hierarquia $Q_1 \triangleright Q_2$ definida pela borda f (linha preta) para uma dada classe de estados.

Definição 1 (Hierarquia).—Se, para uma dada classe de estados ρ_λ , podemos definir uma borda f tal que $Q_2(\rho_\lambda) \geq f(Q_1(\rho_\lambda))$, com $f(x)$ uma função real não-negativa contínua no domínio $x \in [0, 1]$, tal que $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $f(x) > 0$ para $x > 0$, então dizemos que uma hierarquia denotada por $Q_1 \triangleright Q_2$ se mantém, significando que a existência de Q_1 para essa classe de estados necessariamente implica na existência de Q_2 , enquanto o inverso não é verdadeiro.

Observação 1.—Seja $f(x)$ a borda mais estrita possível, i.e., aquela que limita inferiormente a região sombreada, de forma que $\varepsilon f(x)$, com $\varepsilon < 1$, também é uma borda. Então, se f existe, existirão infinitas bordas. Além disso, se f existe, será possível encontrar uma borda linear $f_{lin} = \varepsilon x$ tal que $f_{lin} \leq f$, com igualdade quando $x = 0$. Portanto, é suficiente escolher $\varepsilon = \min_x \frac{f(x)}{x}$, $\forall x \in (0, 1]$. Por outro lado, se escolhermos um $\varepsilon > 0$

arbitrariamente pequeno, isso implica que a noção de hierarquia demanda a exclusão da linha $(Q_1, 0)$, com $Q_1 \in (0, 1]$.

A noção de hierarquia está associada à existência de estados para os quais um dos recursos quânticos é nulo, $Q_1 = 0$, enquanto o outro é diferente de zero, $Q_2 > 0$. Entretanto, não existe nenhum estado para o qual $Q_1 > 0$ e $Q_2 = 0$. Esses estados formam um subconjunto estrito do conjunto total em que a presença de Q_1 implica necessariamente na presença de Q_2 ($Q_1 \triangleright Q_2$).

A noção definida acima nos permite concluir que, para uma dada classe de estados, $Q_1 \triangleright Q_2$, então qualquer esforço para detectar experimentalmente Q_2 pode ser reduzido a detecções de Q_1 , de acordo com a hierarquia de que o último recurso implica no primeiro. Este conceito é especialmente útil em situações envolvendo dinâmicas num espaço restrito. Para analisar esse ponto, considere um processo dinâmico Φ_t , unitário ou não, o qual mapeia um conjunto de estados nele mesmo, i.e., $\Phi_t(\rho_{\lambda(0)}) = \rho_{\lambda(t)}$. Neste caso, qualquer ponto no diagrama $Q_2 \times Q_1$ irá ocupar outro ponto na mesma área preenchida. Como consequência, durante a dinâmica a hierarquia subjacente sempre será respeitada. Se o sistema está sujeito a um canal de ruído Markoviano, no qual todas as correlações quânticas devem desaparecer de uma maneira irreversível, a dinâmica de qualquer ponto no diagrama pode ser representado por uma *trajetória* em direção ao *atrator* $(0, 0)$. Em particular, somente dois tipos de trajetórias podem ser encontradas: (i) ambos os recursos Q_1 e Q_2 desaparecem simultaneamente (linha grossa vermelha inferior na figura 4.1) ou (ii) Q_1 desaparece antes de Q_2 (trajetória superior), de maneira a obedecer a hierarquia $Q_1 \triangleright Q_2$. Por outro lado, para um processo não-Markoviano recorrências podem ocorrer, de forma que as trajetórias podem eventualmente ressurgir de $(0, 0)$ e então posteriormente retornar a esse atrator.

A mudança abrupta na trajetória superior claramente sinaliza uma *morte súbita* de Q_1 enquanto $Q_2 > 0$. Seja t_{Q_1} o instante no qual ocorre a morte súbita de Q_1 . Posteriormente, quando a trajetória começa a seguir a linha $(0, Q_2 > 0)$, tem-se a morte súbita de Q_2 , em um instante t_{Q_2} , ou seu desaparecimento assintótico ($t_{Q_2} \rightarrow \infty$). Em qualquer caso, a trajetória irá alcançar o atrator $(0, 0)$. Apresentamos então outra contribuição desse trabalho: a existência de uma hierarquia $Q_1 \triangleright Q_2$ necessariamente implica numa *cronologia de mortes*, porque a dinâmica tem que ser tal que $t_{Q_2} \geq t_{Q_1}$. Isso significa que Q_2 é mais

robusta que Q_1 ao canal em questão. Se tal hierarquia é de fato universal para recursos Q_1 e Q_2 , então nunca devemos encontrar uma trajetória vertical como no diagrama $Q_2 \times Q_1$ (linha tracejada).

Um outro ponto importante é o seguinte: considere outras medidas genuínas de recursos quânticos, Q'_k ($k = 1, 2$), que podem ser escritas na forma $Q'_k = g_k(Q_k)$. Sendo Q'_k genuína e normalizada por hipótese, devemos exigir que $g_k(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $g_k(x) > 0$ para $x > 0$. Isto é necessário para assegurar que Q'_k e Q_k concordem sobre a existência ou ausência do recurso pertinente. Pode-se tomar como um exemplo a conexão entre emaranhamento de formação $Q'_1 = E_{of}$ (2.33) e concorrência $Q_1 = C$ (2.31); existe uma função monotonicamente crescente g conhecida, tal que $E_{of} = g(C)$. Agora podemos provar o seguinte resultado.

Lemma 1.—*Dada a hierarquia $Q_1(\rho_\lambda) \triangleright Q_2(\rho_\lambda)$ para uma classe de estados ρ_λ e funções $g_k(x)$ no domínio $x \in [0, 1]$ tal que $g_k(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $g_k(x) > g_k(0)$ para $x > 0$, então $g_1(Q_1(\rho_\lambda)) \triangleright g_2(Q_2(\rho_\lambda))$.*

Prova: Pela Observação 1, a hipótese $Q_1(\rho_\lambda) \triangleright Q_2(\rho_\lambda)$ implica na ausência da linha $(Q_1, 0)$, $\forall Q_1 \in (0, 1]$ no diagrama $Q_2 \times Q_1$. Segue diretamente das propriedades de g que a linha $(Q'_1, 0)$ é excluída do diagrama $Q'_2 \times Q'_1$. Portanto, a hierarquia $g_1(Q_1(\rho_\lambda)) \triangleright g_2(Q_2(\rho_\lambda))$ se mantém. ■

Este resultado é relevante porque assegura que não precisamos comparar diversas medidas de emaranhamento com diversas medidas de não-localidade, é suficiente escolher uma medida de emaranhamento e uma medida de não-localidade, desde que ambas satisfaçam as propriedades necessárias para que sejam consideradas medidas genuínas de correlação. Esse resultado vale similarmente para os outros recursos, sendo suficiente comparar somente um par genuíno.

Diagramas de recursos podem revelar dois outros aspectos interessantes, que estão relacionados com as linhas $(1, Q_2)$, com $a \leq Q_2 < 1$ e $(0, Q_2)$, com $0 < Q_2 \leq b$ (veja a figura 4.1). Primeiro, se $a < 1$, a situação é tal que existem estados para os quais Q_1 e Q_2 não atingem seus valores máximos simultaneamente, isto é, $Q_1 = 1$ enquanto $Q_2 < 1$. Considerando emaranhamento e não-localidade de Bell, essa circunstância tem sido referida na literatura como uma *anomalia* [88]. Segundo, se $a = 1$ e $b = 0$, as linhas

$(1, Q_2)$ e $(0, Q_2)$ se tornam pontos e as medidas Q_1 e Q_2 concordam em identificar os estados que não têm correlação e aqueles que são maximamente correlacionados. O que permanece neste caso é justamente o problema de ordenamento, que é bem conhecido para medidas de emaranhamento [90]. Isto motiva a noção de *equivalência*.

Definição 2 (Equivalência).—*Se, para estados ρ_λ , as linhas $(Q_1 > 0, 0)$ e $(0, Q_2 > 0)$ estão ausentes do diagrama $Q_2 \times Q_1$ e, além disso, Q_1 atinge seu valor extremo (0 ou 1) somente quando Q_2 também o faz (isto é, $a = 1$ e $b = 0$ simultaneamente), então dizemos que uma equivalência denotada por $Q_2 \equiv Q_1$ vale para essas medidas para a classe de estados em questão.*

Isso significa que em tal cenário não podemos nos referir a Q_1 e Q_2 como quantificadores de recursos diferentes.

Nesta seção, definimos noções tais como hierarquia, cronologia de mortes, trajetória no espaço $Q_2 Q_1$, anomalia, e equivalência no contexto de um diagrama $Q_2 \times Q_1$. Na próxima seção, iremos apresentar resultados analíticos e numéricos para a classe de estados X com máximas marginais (2.55).

4.2 Resultados

Para elaborar nossa análise de hierarquia, iremos utilizar os estados X com três parâmetros (2.55). Para esta classe de estados, todas as medidas de correlações quânticas foram calculadas analiticamente na literatura (veja, por exemplo, [65, 89] e referências ali citadas). No que concerne aos quantificadores que iremos analisar, usaremos direcionamento EPR no cenário de três medições por sítio, pois como mostrado no capítulo anterior, o direcionamento EPR no cenário de duas medições na verdade constitui uma medida de não-localidade (3.38). Por esse motivo, daqui em diante vamos chamar o direcionamento EPR-3 somente de direcionamento EPR (\mathcal{D}). No contexto da não-localidade, iremos realizar as análises para o quantificador da não-localidade CHSH (N), já que não existe um quantificador analítico para a desigualdade I_{3322} para estados X de três parâmetros. Para o cálculo de emaranhamento, usaremos a concorrência, que chamaremos aqui de E .

Os resultados analíticos para as medidas de correlação quântica discórdia- q (2.38),

emaranhamento (2.31), direcionamento EPR (3.39), e não-localidade de Bell (2.23) para estados X de dois qubits $\rho_{\vec{c}}$ (2.55) são apresentados na tabela 4.1. Usando estas fórmulas, prosseguimos com uma análise estatística envolvendo o cálculo e a comparação dessas medidas sob 10^6 vetores \vec{c} gerados aleatoriamente para cada diagrama. Utilizamos o software *Mathematica* para a realização dos cálculos numéricos.

Tabela 4.1: Resultados analíticos para as medidas de correlação quântica: discórdia- q (D_q), emaranhamento (E), direcionamento EPR (\mathcal{D}) e não-localidade de Bell (N) para estados X de dois qubits $\rho_{\vec{c}}$ dados pela equação (2.55). Aqui, $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de $\rho_{\vec{c}}$, $c_{\max} \equiv \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$, $c_{\min} \equiv \min\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ e $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Uma normalização conveniente foi introduzida na discórdia- q de forma a assegurar que $D_q \in [0, 1]$.

Medidas de correlação quântica

$$D_q(\rho_{\vec{c}}) = \frac{1}{1-2^{1-q}} \left[\sum_{i=1}^4 \lambda_i^q - \frac{(1+c_{\max})^q + (1-c_{\max})^q}{2^{2q-1}} \right]$$

$$E(\rho_{\vec{c}}) = \max \left\{ 0, \frac{|c_1 - c_2| - |1 - c_3|}{2}, \frac{|c_1 + c_2| - |1 + c_3|}{2} \right\}$$

$$\mathcal{D}(\rho_{\vec{c}}) = \max \left\{ 0, \frac{c-1}{\sqrt{3}-1} \right\}$$

$$N(\rho_{\vec{c}}) = \max \left\{ 0, \frac{\sqrt{c^2 - c_{\min}^2} - 1}{\sqrt{2}-1} \right\}$$

4.2.1 Equivalência de todas as discórdias- q

Nosso objetivo neste capítulo é analisar a hierarquia que existe entre as medidas de correlação. Porém, antes dessa análise, é necessária uma investigação entre as diferentes discórdias provenientes da variação do parâmetro q na discórdia- q (2.38). A figura 4.2 mostra nossos resultados numéricos para diagramas $D_q \times D_{q+\epsilon}$ com $0,05 \leq q \leq 7$ e ϵ um número real gerado aleatoriamente entre $[0, \epsilon_{\max}]$. Para esses diagramas, encontramos empiricamente as seguintes bordas (representadas na figura 4.2 pelas linhas sólidas pretas):

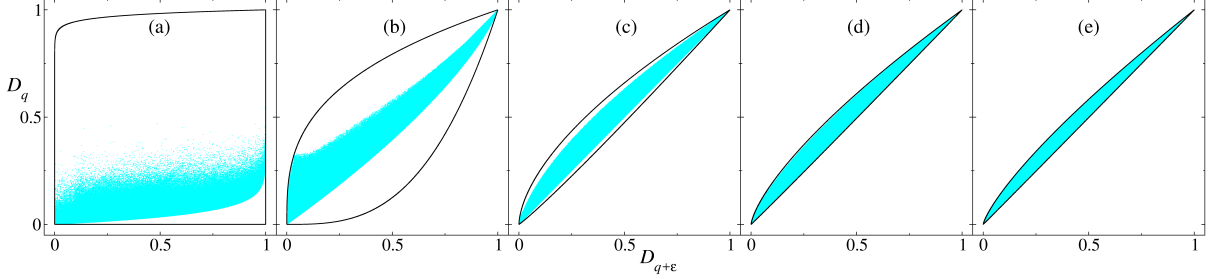


Figura 4.2: Diagramas $D_q \times D_{q+\epsilon}$. Cada gráfico contém 10^6 pontos (azuis) gerados aleatoriamente, cada um correspondendo a um estado $\rho_{\bar{c}}$ e um dado ϵ gerado aleatoriamente do intervalo $[0, \epsilon_{\max}]$, com $\epsilon_{\max} = 3$. As bordas superiores e inferiores (linhas sólidas pretas) são dadas pelas fórmulas (4.1). Nesses cálculos usamos (a) $q = 0,05$, (b) $q = 1$, (c) $q = 3$, (d) $q = 5$ e (e) $q = 7$.

$$D_q = (D_{q+\epsilon})^{\frac{q^s}{q^s + \epsilon_{\max}}}, \quad \text{com } s = 1 \quad (\text{borda superior}), \quad (4.1a)$$

$$D_q = (D_{q+\epsilon})^{\frac{q^s + \epsilon_{\max}}{q^s}}, \quad \text{com } s = 4 \quad (\text{borda inferior}). \quad (4.1b)$$

Averiguamos essas bordas para um número de valores de q e ϵ_{\max} , com $\epsilon \in [0, \epsilon_{\max}]$, e não encontramos nenhuma violação. Como é sugerido pelos diagramas apresentados na figura 4.2 e corroborado pelas bordas analíticas (4.1), as linhas $(D_{q+\epsilon} > 0, 0)$ e $(0, D_q > 0)$ estão excluídas de todos os diagramas $D_q \times D_{q+\epsilon}$. Logo, a partir da análise acima e da Definição 2, temos:

Resultado 1.—*Todas as discórdias- q são equivalentes para os estados $\rho_{\bar{c}}$, i.e., $D_q \equiv D_{q+\epsilon}$, $\forall (q, \epsilon) > 0$.*

Isto significa que D_q e $D_{q' \neq q}$ sempre irão concordar quando um dado estado $\rho_{\bar{c}}$ possui discórdia nula ou máxima. Como consequência, não precisamos investigar a hierarquia respeitada por toda discórdia- q em relação a outras medidas de correlação; um único valor, digamos $q = 1$, é suficiente.

4.2.2 Hierarquia dos recursos quânticos

Na figura 4.3 mostramos nossos resultados numéricos para a hierarquia de recursos. As bordas inferiores mostradas nos diagramas correspondem ao gráfico paramétrico $Q_2 \times Q_1$ para o estado $\vec{c} = (u, u, -1)$, com $u \in [0, 1]$. Eles podem ser escritos como

$$D_1(E) = \frac{2E \arctan E + \ln(1 - E^2)}{\ln 4}, \quad (4.2a)$$

$$E(\mathcal{D}) = \sqrt{\frac{[(\sqrt{3} - 1)\mathcal{D} + 1]^2 - 1}{2}}, \quad (4.2b)$$

$$\mathcal{D}(N) = \frac{\sqrt{1 + 2N^2} - 1}{\sqrt{3} - 1}. \quad (4.2c)$$

As bordas superiores não podem ser exibidas como funções analíticas, pois elas contêm a linha $(0, Q_2)$, mas elas podem ser calculadas numericamente e apresentadas num gráfico paramétrico. Enquanto que, para os diagramas $E \times \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \times N$, a borda superior é dada pelo estado de Werner $\vec{c} = -u(1, 1, 1)$, com $u \in [0, 1]$, em $D_1 \times E$ o mesmo estado de Werner compete com o estado $\vec{c} = (u, -u, 2u - 1)$, com $u \in [0, 1]$ (representado pela linha tracejada preta).

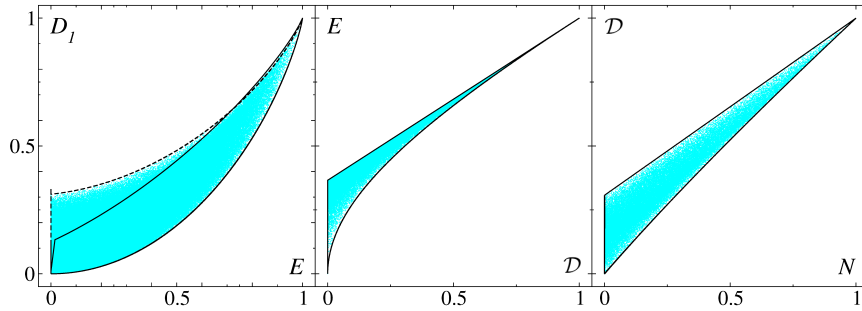


Figura 4.3: Diagramas $D_1 \times E$ (primeiro gráfico), $E \times \mathcal{D}$ (gráfico intermediário) e $\mathcal{D} \times N$ (último gráfico). Cada gráfico contém 10^6 pontos gerados aleatoriamente, cada um correspondendo a um estado $\rho_{\vec{c}}$. As bordas inferiores (linhas sólidas pretas) são dadas pelas fórmulas (4.2).

Estas observações nos permitem formular o seguinte resultado.

Resultado 2.—A hierarquia dos recursos quânticos para os estados $\rho_{\vec{c}}$ é dada por $N \triangleright \mathcal{D} \triangleright E \triangleright D_1 \equiv D_q$.

A equivalência $D_1 \equiv D_q$ vem do Resultado 1. Além disso, está claro que nenhuma anomalia aparece no presente cenário.

É digno de nota acrescentar que esses resultados concordam plenamente com os resultados analíticos envolvendo emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell apresentados no capítulo 3. Além disso, corroboram a hierarquia esperada para os diferentes modelos de localidade. É instrutivo notar que pode-se incluir a discórdia na descrição de modelos de localidade. Para isso, considere a distribuição de probabilidade (3.11) de um modelo separável,

$$\begin{aligned} p(ab|xy) &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \left(\text{Tr}_A[x_a \rho_{\lambda}^A] \right) \left(\text{Tr}_B[y_b \rho_{\lambda}^B] \right) \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{Tr}[(x_a \otimes y_b) \rho_{\lambda}^A \otimes \rho_{\lambda}^B]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se impusermos a restrição adicional de que $\rho_{\lambda}^A = |\alpha_{\lambda}\rangle\langle\alpha_{\lambda}|$, um estado puro, então teremos

$$\varrho = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\alpha_{\lambda}\rangle\langle\alpha_{\lambda}| \otimes \rho_{\lambda}^B, \quad (4.4)$$

que é um estado com discórdia nula para medidas em A . Como esse modelo de localidade para a discórdia é ainda mais restrito que os demais, ele só será satisfeito por λ e $\rho_{\lambda}^{A,B}$ se todos os outros também forem satisfeitos, concordando com a hierarquia que obtivemos no Resultado 2.

A figura 4.4 mostra a hierarquia do Resultado 2 com respeito ao conjunto de estados que apresentam os recursos quânticos mencionados acima. Temos um conjunto com os estados que não possuem nenhum dos recursos, denominados como estados clássicos, e outro conjunto onde estados discordantes (com discórdia não-nula) formam um superconjunto estrito do conjunto de estados emaranhados, e conseqüentemente, estados EPR direcionáveis formam um subconjunto estrito dos estados emaranhados, e um superconjunto estrito dos estados que exibem não-localidade de Bell.

Uma observação é agora oportuna. Devido a certo grau de arbitrariedade envolvido na definição das medidas em questão, não é possível atribuir um significado inequívoco para seus valores absolutos. Logo, a forma das regiões da figura 4.3 e suas bordas dependem inevitavelmente das definições escolhidas. Existe, entretanto, um aspecto que é invariante,



Figura 4.4: Hierarquia dos recursos quânticos para o conjunto de estados $\rho_{\vec{z}}$. Figura adaptada de <http://quantumcorrelations.weebly.com/research.html>.

qual seja, o fato que não deve existir nenhum estado X de dois qubits que é emaranhado e não-discordante, EPR direcionável e separável, Bell local e não-direcionável. A hierarquia expressa pelo Resultado 2 revela recursos quânticos que são estritamente necessários para a existência dos outros.

4.2.3 Cronologia de “mortes” e “ressurgimentos” em canais quânticos

Uma consequência imediata dos resultados acima é que os recursos quânticos sob investigação irão consequentemente exibir uma hierarquia de *robustez* sob canais de ruído arbitrários. Isto se deve ao fato de que se $Q_1 \triangleright Q_2$ vale, então Q_2 não pode desaparecer antes de Q_1 . Segue que a discórdia- q é o recurso mais resistente, seguido por emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell. Em outras palavras, é a não-localidade de Bell que é esperada ser a primeira correlação a ser suprimida sob canais de ruído. Devido ao caráter descontínuo inerente ao processo de maximização em nossas medidas, é natural esperar a ocorrência de *mortes súbitas* e *ressurgimentos súbitos* sob uma dinâmica descoerente, a qual deve ocorrer de acordo com um ordenamento cronológico obedecendo

a hierarquia $N \triangleright \mathcal{D} \triangleright E \triangleright D_q$. No que segue, vamos verificar este ponto em um cenário concreto. Para isso, considere uma situação na qual um estado $\rho_{\vec{c}}$ está sujeito aos canais de ruído descritos na tabela 2.1. Para esses canais vale que $\mathcal{E}(\rho_{\vec{c}}) = \rho_{\vec{c}'}$, onde \vec{c}' é obtido de acordo com as prescrições apresentadas na tabela 4.2. A operação quântica nos dois qubits é uma extensão da equação (2.42),

$$\mathcal{E}(\rho) \equiv \sum_{ij} (K_i \otimes K_j) \rho (K_i \otimes K_j)^\dagger. \quad (4.5)$$

Por simplicidade, vamos nos restringir ao caso no qual ambos os qubits estão sujeitos ao mesmo canal quântico, ou seja, com $i = j$.

Tabela 4.2: Regras de transformação $\vec{c} \xrightarrow{\mathcal{E}} \vec{c}'$ emergindo do mapeamento $\mathcal{E}(\rho_{\vec{c}}) = \rho_{\vec{c}'}$ associado aos canais quânticos: inversão de bit (IB), inversão de fase e bit (IFB), inversão de fase (IF), despolarização (DP) e atenuação de amplitude generalizada (AAG). Aqui consideramos que ambos os qubits estão sujeitos ao mesmo canal quântico.

Canal	c'_1	c'_2	c'_3
IB	c_1	$c_2(1-p)^2$	$c_3(1-p)^2$
IFB	$c_1(1-p)^2$	c_2	$c_3(1-p)^2$
IF	$c_1(1-p)^2$	$c_2(1-p)^2$	c_3
DP	$c_1(1-p)^2$	$c_2(1-p)^2$	$c_3(1-p)^2$
AAG	$c_1(1-\gamma)$	$c_2(1-\gamma)$	$c_3(1-\gamma)^2$

A relevância de tais mapas no presente trabalho se baseia no fato que a região preenchida em um diagrama $Q_2 \times Q_1$ constitui ambos o espaço do domínio e da imagem para estes mapas, de forma que a hierarquia de recursos será respeitada para todos os tempos. Esta observação, junto com o comportamento assintótico bem conhecido da discórdia, dá suporte à seguinte afirmação.

Resultado 3.—*Sejam t_Q e τ_Q os instantes mais curtos de tempo no qual o recurso Q desaparece e ressurgue, respectivamente, numa dinâmica descoerente. Para estados $\rho_{\vec{c}}$, uma cronologia de morte e uma cronologia de ressurgimento existe tal que $t_{D_q} \geq t_E \geq t_{\mathcal{D}} \geq t_N$, com $t_{D_q} = \infty$ e $\tau_N \geq \tau_{\mathcal{D}} \geq \tau_E$.*

Na próxima seção, apresentamos ilustrações dessas cronologias introduzindo uma dependência temporal nos parâmetros p e γ dos canais de ruído da tabela 2.1.

Canais Markovianos

Para a simulação de canais Markovianos, usamos a parametrização usual

$$p(t) = \gamma(t) = 1 - e^{-t/2}, \quad (4.6)$$

onde $t = \Gamma\tau$ é uma escala temporal adimensional que faz referência ao tempo físico τ em unidades de um dado tempo de relaxamento Γ^{-1} . Sem nenhuma perda de generalidade, iremos assumir daqui para frente que $\Gamma = 1$ [u.a.], tal que t é equivalente ao tempo físico τ . Para qualquer um dos canais dados na tabela 2.1, pode ser verificado analiticamente a partir dos resultados apresentados na tabela 4.1 que no equilíbrio ($t \rightarrow \infty$) nenhum recurso sobrevive, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\mathcal{E}_t(\rho_{\vec{c}})) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(\rho_{\vec{c}'(t)}) \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Além disso, a partir dos resultados apresentados na tabela 4.2 e do comportamento assintótico de $p(t)$ e $\gamma(t)$, vemos que nenhuma recorrência acontece para nenhum recurso, o que sinaliza que o modelo (4.6) implementa adequadamente a física de canais Markovianos. Mais importante, a partir de uma análise dos resultados analíticos da tabela 4.1 e 4.2 e simulações numéricas extensivas, encontramos o seguinte resultado.

Resultado 4.—*Excluindo um conjunto com medida nula, que é definido pelos estados puros*

$$\vec{c} = \{(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}, \quad (4.8)$$

sendo que todos correspondem ao ponto extremo $(1, 1)$ nos diagramas $Q_2 \times Q_1$ e para os quais a morte de todos os recursos ocorre somente assintoticamente ($t = \infty$) para os canais IB, IFB e IF, todos os estados $\rho_{\vec{c}}$ levam à morte súbita de emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade para todos os canais da tabela 2.1 com o modelo Markoviano (4.6).

Isso significa que exceto para um conjunto com medida nula, todos os estados $\rho_{\vec{c}}$ irão apresentar supressão abrupta de emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade em certos tempos obedecendo a cronologia apresentada no Resultado 3 e supressão assintótica da discórdia. Este cenário é ilustrado na figura 4.5 para um canal Markoviano.

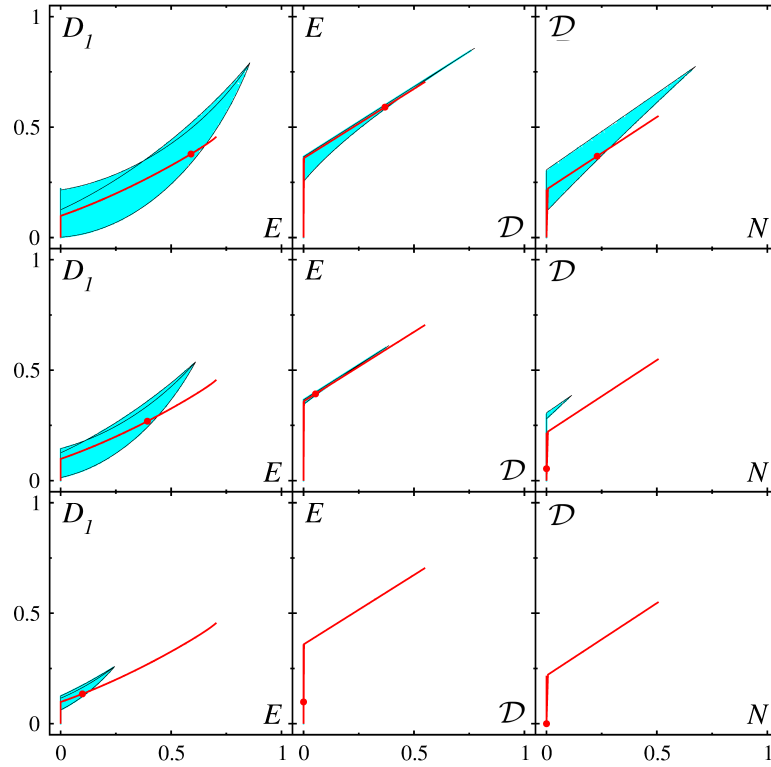


Figura 4.5: Instantâneos com $t_1 = 0,1$ (diagramas superiores), $t_2 = 0,3$ (diagramas intermediários) e $t_3 = 0,7$ (diagramas inferiores) para a evolução temporal de 55×10^4 estados $\rho_{\vec{c}}$ (pontos azuis) sob um canal Markoviano DP. No instante $t_0 = 0$, o cenário é como na figura 4.3. A linha grossa vermelha é a trajetória referente ao estado $\vec{c} = (-0,71, -0,75, -0,95)$, cujo comportamento é típico e a esfera vermelha é a posição desse estado nos instantes $t_{1,2,3}$. Note que existe uma dinâmica de morte súbita para todos os recursos exceto para a discórdia.

Todos os estados X de dois qubits irão apresentar morte súbita para todos os canais, exceto os estados enunciados no Resultado 4 para os canais IB, IFB e IF. Podemos observar facilmente esse comportamento analiticamente. Para isso, basta substituir os estados $\rho_{\vec{c}'}$ nas medidas de correlações e igualá-las a zero. Com essa substituição podemos isolar o tempo, que passa a ser o tempo de morte súbita. Analisando esses tempos e sua dependência com os parâmetros do estado inicial, é possível diferenciar os estados que

apresentarão morte súbita daqueles que somente terão supressão assintótica. Os últimos são dados pelo conjunto apresentado no Resultado 4.

A figura 4.6 dá uma ilustração de duas trajetórias em diagramas tridimensionais $N \times \mathcal{D} \times E$. Estas trajetórias representam a evolução temporal de dois estados $\rho_{\vec{c}}$ sob três canais distintos, IF, DP e AAG. Apesar de apenas dois estados serem mostrados, estes exemplos são suficientes para representar os dois únicos comportamentos que podemos encontrar para trajetórias Markovianas nesse contexto, ou seja, a trajetória ou move-se assintoticamente para o atrator, como na figura 4.6(a), ou apresenta sucessivas mudanças abruptas obedecendo a hierarquia de recursos, que é o comportamento típico para trajetórias.

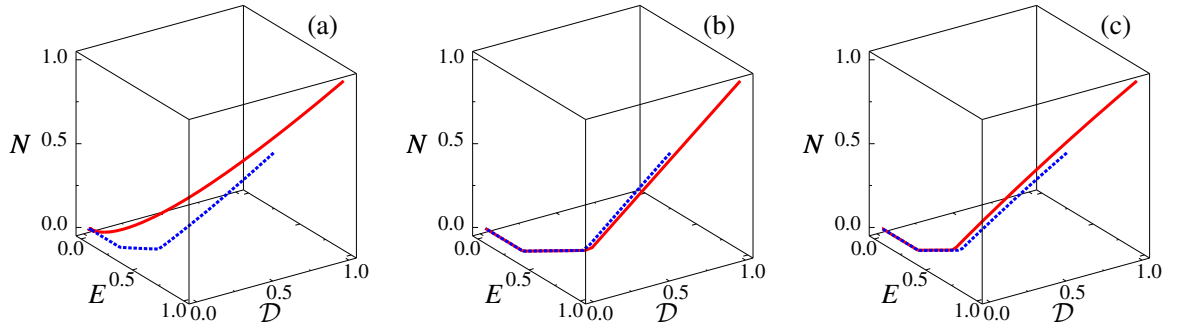


Figura 4.6: Diagrama tridimensional $N \times \mathcal{D} \times E$ mostrando a evolução temporal dos estados $\vec{c} = (-1, -1, -1)$ (linha sólida vermelha) e $\vec{c} = (0, 84, 0, 91, -0, 84)$ (linha tracejada azul) sob os canais (a) IF, (b) DP e (c) AAG. Note que para o estado puro $\vec{c} = (-1, -1, -1)$ sob o canal IF, o desaparecimento dos recursos ocorre assintoticamente (veja Resultado 4).

Uma ilustração da cronologia de morte súbita pode ser dada para estados iniciais com $\vec{c} = (u, u, v)$, $\frac{v-1}{2} \leq u \leq \frac{1-v}{2}$ e $-1 \leq v \leq 1$, sob um canal de inversão de fase (IF). Neste caso, podemos calcular analiticamente os seguintes tempos de morte súbita:

$$t_E = \ln \left(\frac{2|u|}{1+v} \right), \quad (4.9a)$$

$$t_D = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2u^2}{1-v^2} \right) = \frac{t_E}{2} - \ln \sqrt{\frac{(1-v)}{|u|}}, \quad (4.9b)$$

$$t_N = \frac{1}{2} \max \left[\ln \left(\frac{u^2}{1-v^2} \right), \ln (2u^2) \right] = \max \left[t_D - \ln \sqrt{2}, t_D + \ln \sqrt{1-v^2} \right]. \quad (4.9c)$$

Pelo domínio de u , vemos que $\frac{1-v}{|u|} \geq 2$, o qual leva a $t_D \leq \frac{t_E}{2} - \ln \sqrt{2}$. Por outro

lado, pelo domínio de v , vemos que $\ln \sqrt{1-v^2}$ é estritamente não-positivo, de forma que $t_N = t_D - \min[\ln \sqrt{2}, |\ln \sqrt{1-v^2}|]$. A partir desses resultados obtém-se a seguinte cronologia estrita $t_N < t_D < t_E$, o que está de acordo com o Resultado 3.

Canais não-Markovianos

É possível implementar uma dinâmica não-Markoviana no formalismo dos operadores de Kraus, usando esses operadores como foi feito na seção anterior, mas introduzindo as seguintes probabilidades de ruído:

$$p(t) = \gamma(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \lambda \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right], \quad (4.10)$$

onde λ é uma taxa de decaimento. Essas probabilidades de ruído foram apresentadas em [91], onde os autores simulam um modelo com dois qubits acoplados independentemente a reservatórios com temperatura nula. A partir desse modelo, os autores conseguem calcular os operadores de Kraus com as probabilidades de ruído acima no regime de acoplamento forte, sinalizando uma dinâmica não-Markoviana.

A partir dessa definição para as probabilidades de ruído e os resultados analíticos apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2, podemos ilustrar a cronologia de ressurgimentos apontada no Resultado 3. Na figura 4.7 mostramos a evolução temporal do estado de Werner sob um canal IF não-Markoviano. A presença de recorrências nas medidas de correlação quântica Q são assinaturas da reversibilidade residual característica de canais não-Markovianos. Podemos ver claramente na magnificação fornecida pela figura 4.7(b) a ocorrência de mortes súbitas e ressurgimentos súbitos de emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade, sempre respeitando a cronologia demandada pelo Resultado 3. Discórdia quântica, por seu lado, desaparece e ressurge suavemente. Apesar de não ser mostrado na figura, para tempos suficientemente longos, pode-se verificar que $Q(\rho_{\vec{c}}) \rightarrow 0$.

Neste capítulo, a partir de resultados analíticos e ferramentas estatísticas convenientes, tal como os diagramas de recursos, demonstramos que recursos quânticos tais como discórdia- q , emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell obedecem uma hierarquia para a classe de estados X de dois qubits com marginais maximamente misturadas (2.55). Isso significa que para esses estados a presença da não-localidade de Bell

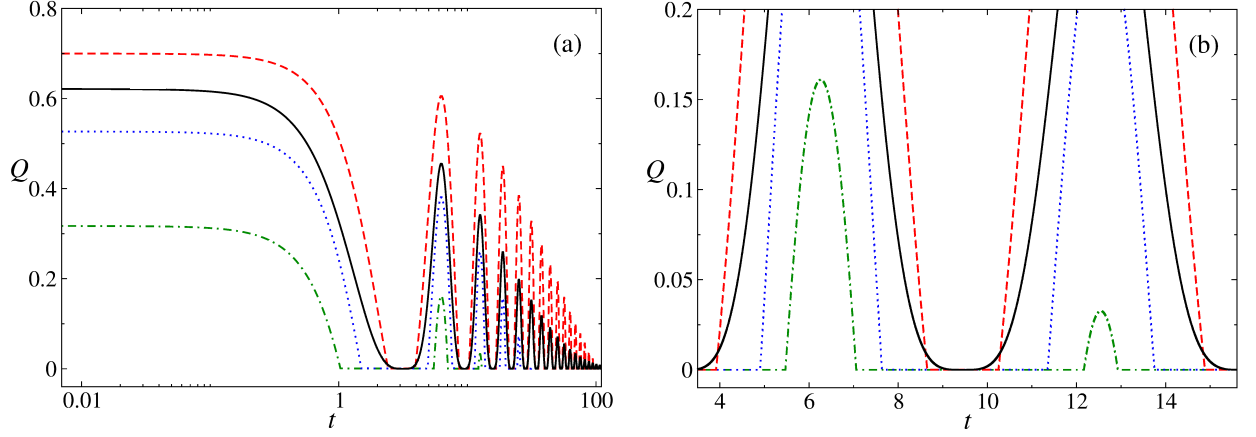


Figura 4.7: (a) Recursos quânticos $Q(\rho_{\vec{c}})$ como função do tempo adimensional, onde $Q = D_1$ (linha sólida preta), $Q = E$ (linha tracejada vermelha), $Q = \mathcal{D}$ (linha pontilhada azul) e $Q = N$ (linha pontilhada-tracejada verde). Esses resultados se referem à dinâmica do estado de Werner $\vec{c} = (-0,8, -0,8, -0,8)$ num canal IF com taxa de decaimento $\lambda = 0,01$ [u.a.]. O gráfico (b) é uma magnificação de um domínio de tempo conveniente no qual podemos observar a cronologia de mortes e ressurgimentos.

garante a presença de direcionamento EPR, e a presença de direcionamento EPR garante a presença de emaranhamento e emaranhamento garante a presença da discórdia- q . Além disso, mostramos que todas as discórdias- q são equivalentes à discórdia térmica D_1 , que está associada à diferença de trabalho termodinâmico extraído de banhos térmicos por demônios clássicos e quânticos [34].

Como uma consequência direta da hierarquia observada, encontramos uma hierarquia correspondente de robustez sob canais de ruído genéricos, implicando em uma cronologia necessária de mortes (súbitas) e ressurgimentos (súbitos) para os recursos em questão. Discórdia se mostrou o recurso mais robusto, desaparecendo completamente somente assintoticamente. Além disso, descobrimos que o fenômeno de morte súbita de emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell é, na verdade, *a regra ao invés da exceção* para esta classe de estados. De fato, somente um conjunto de estados de medida nula não apresenta morte súbita sob canais Markovianos. Finalmente, também investigamos canais de ruído não-Markovianos e verificamos a cronologia esperada de ressurgimentos súbitos.

Nossas descobertas dão um forte suporte para a hierarquia prevista no capítulo anterior e nas referências [14, 15, 89] para emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade em cenários envolvendo poucas medidas por sítio. Além disso, mostramos

como alocar a discórdia- q nesta hierarquia. As evidências aqui fornecidas se referem a um cenário particular, de forma que surge naturalmente a questão de que se essa hierarquia observada de recursos quânticos será respeitada em contextos mais gerais envolvendo muitas medidas por sítio, sistemas multipartidos e espaços de Hilbert de dimensões maiores. Esta é uma questão em aberto que delineia um interessante programa de pesquisa. Os resultados deste capítulo foram publicados em [92].

Monogamia e fluxo de informação mútua em banhos térmicos não-Markovianos

Nos capítulos anteriores apresentamos uma fórmula fechada para a medida de correlação chamada direcionamento EPR (capítulo 3) e a relação de hierarquia entre diferentes recursos de correlação quântica, como discórdia- q , emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell (capítulo 4). Neste capítulo, considerando agora sistemas tripartidos, vamos explorar uma medida de correlações totais, conhecida como informação mútua, que discutimos na seção 2.2.1, e o fluxo de informação que pode ocorrer entre as diferentes partições nesses sistemas.

Primeiramente fazemos algumas observações em relação a medidas de informação. Em particular, analisamos se a informação mútua é monogâmica, ou seja, se ela não pode ser livremente distribuída entre as diferentes partes de sistemas tripartidos. Encontramos que a informação mútua é monogâmica para estados mistos somente se a quantidade de correlações tripartidas genuínas é grande o suficiente. Com esse resultado, estudamos o fluxo de informação numa dinâmica de defasagem (perda de fase sem dissipação de energia) governada por banhos térmicos finitos. Além disso, calculamos uma testemunha de não-Markovianidade e expressamos seu comportamento como uma função da temperatura e o número de modos do banho.

5.1 Observações preliminares

5.1.1 Informação do estado e informação mútua

Para um sistema multipartido genérico num estado $\rho \in \mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} = d$) definimos a *informação do estado* (*state information*) como

$$\mathcal{I} = \ln d - S, \quad (5.1)$$

onde $S = S(\rho)$ é a entropia de von Neumann. Alternativamente, \mathcal{I} pode ser vista como uma medida de pureza. Considere um corte arbitrário produzindo duas partes x e y tal que $d = d_x d_y$. Segue da equação (5.1) que

$$\mathcal{I} = \ln(d_x d_y) - S = \ln d_x + \ln d_y - S. \quad (5.2)$$

Aqui, pode-se somar zero (para inserir S_x e S_y) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \ln d_x + \ln d_y - S + (S_x - S_x) + (S_y - S_y) \\ &= (\ln d_x - S_x) + (\ln d_y - S_y) + (S_x + S_y - S) \\ &= \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y + I_{x:y}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}(\rho_x)$ e $\rho_x = \text{Tr}_y \rho$. $I_{x:y} = S_x + S_y - S$ é a informação mútua das partes x e y . A partir do fato de que a informação mútua é sempre não negativa, temos que $\mathcal{I} \geq \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y$, uma relação de monogamia mostrando que a informação local total não é suficiente, em geral, para obter a informação do estado; a diferença é a informação mútua.

Neste capítulo vamos focar em estados tripartidos, associados com os subsistemas A , B e C . Considere que $x = AB$ e $y = C$. De acordo com a equação (5.3), pode-se escrever $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{AB} + \mathcal{I}_C + I_{AB:C}$ e $\mathcal{I}_{AB} = \mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B + I_{A:B}$, de forma que obtemos

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{LOC}} + I_{A:B} + I_{AB:C}, \quad (5.4)$$

onde $\mathcal{I}_{\text{LOC}} \equiv \mathcal{I}_A + \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_C$ quantifica a informação local total. A partir da equação (5.1) podemos também mostrar que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{LOC}} + I_T$, onde $I_T \equiv S(\rho || \rho_A \otimes \rho_B \otimes \rho_C) \geq 0$ é a

informação mútua total [93] e $S(\rho||\sigma)$ é a entropia relativa de ρ e σ [94], dada por

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr} \rho \ln \rho - \text{Tr} \rho \ln \sigma. \quad (5.5)$$

Está claro que I_T mede a quantidade de informação que *não* está localmente armazenada. De fato, ela pode ser escrita como

$$I_T = \frac{1}{3} (I_{A:B} + I_{B:C} + I_{A:C} + I_{AB:C} + I_{BC:A} + I_{AC:B}), \quad (5.6)$$

a soma das informações mútuas de todas as bipartições do sistema.

5.1.2 Correlações tripartidas genuínas

Bennett *et al* [95] definiram correlações n -partidas da seguinte maneira: “Um estado de n partes tem correlações n -partidas genuínas se não é um produto em cada corte bipartido.” Assim, eles mostram que correlações n -partidas adequadamente definidas satisfazem um conjunto de postulados razoáveis. Como notado por Maziero *et al* [96], segue como uma implicação lógica que

$$I_3 \equiv \min_{(A,B,C)} I_{AB:C} = \min\{I_{AB:C}, I_{AC:B}, I_{BC:A}\} \quad (5.7)$$

representa uma medida de correlações tripartidas genuínas, onde a minimização é tomada sobre todas as permutações de (A, B, C) . No decorrer deste capítulo vamos empregar esta medida para quantificar correlações tripartidas genuínas. Reescrevendo a equação (5.4) como $\mathcal{I} - \mathcal{I}_{\text{LOC}} - I_{A:B} = I_{AB:C}$ e aplicando a minimização em ambos os lados, obtemos, pela equação (5.7), que

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{LOC}} + I_3 + \max_{(A,B,C)} I_{A:B}. \quad (5.8)$$

Como $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(0)$ para qualquer sistema fechado, esta relação implica numa troca entre estas medidas de informação. Usamos esta expressão para estabelecer nossa noção de *fluxo de informação*. Está claro que sempre que a informação local muda, a soma das correlações tripartidas e bipartidas têm que mudar na mesma quantidade.

5.1.3 Monogamia da informação mútua

Emaranhamento é uma correlação monogâmica [97–99]. Isso significa que ele não pode ser livremente compartilhado por partes distintas. Ou seja, se um sistema quântico está emaranhado com outro sistema, seu possível emaranhamento com um terceiro sistema é limitado. Um exemplo de desigualdade da monogamia é a fórmula de Coffman-Kundu-Wooters (CKW) para o quadrado da concorrência [97],

$$\mathcal{C}_{(AB)C}^2 \geq \mathcal{C}_{AC}^2 + \mathcal{C}_{BC}^2, \quad (5.9)$$

que vale para estados puros de três qubits. Como o emaranhamento bipartido somado geralmente não corresponde ao emaranhamento total das partes AB e C , então deve existir algum emaranhamento tripartido genuíno τ_{ABC} , tal que

$$\mathcal{C}_{(AB)C}^2 = \mathcal{C}_{AC}^2 + \mathcal{C}_{BC}^2 + \tau_{ABC}, \quad (5.10)$$

com $\tau_{ABC} \geq 0$. Por outro lado, é bem conhecido que correlações clássicas não são monogâmicas. Aqui perguntamos se deve existir alguma desigualdade de monogamia para a informação mútua. Para analisar esta questão, manipulamos a definição de informação mútua para chegar em

$$I_{AB:C} = (I_{A:C} + I_{B:C}) + \mathfrak{J}, \quad (5.11)$$

onde

$$\mathfrak{J} = S_{AB} + S_{AC} + S_{BC} - S_A - S_B - S_C - S. \quad (5.12)$$

A contraparte clássica de \mathfrak{J} —algumas vezes chamada de *informação de interação* (*interaction information*)—apareceu há muito tempo em teoria da informação [100, 101] mas, mesmo atualmente, sua interpretação ainda é debatível (veja [102] e suas referências).

A equação (5.11) mostra que uma desigualdade da monogamia existirá se $\mathfrak{J} \geq 0$. Entretanto, é fácil mostrar por cálculo direto de \mathfrak{J} que, para alguns estados, a monogamia

nem sempre é satisfeita. Por exemplo, considere os estados [103]

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(|000\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|),$$

$$\rho_2 = \rho_{AC} \otimes \rho_B,$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}(|000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|).$$

Para tais estados, mostra-se que $\mathfrak{I}(\rho_1) = \ln 2$, $\mathfrak{I}(\rho_2) = 0$, e $\mathfrak{I}(\rho_3) = -\ln 2$. Para uma ilustração do comportamento não-trivial de I_3 (5.7) e \mathfrak{I} (5.12), consideramos um sistema de três qubits no estado

$$\rho = \left(\frac{1-x}{8}\right) \mathbb{1}_{ABC} + x |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \text{com} \quad |\psi\rangle = \alpha |000\rangle + \beta |010\rangle + \gamma |101\rangle + \delta |111\rangle, \quad (5.13)$$

onde $x \in [0, 1]$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Embora uma fórmula analítica para \mathfrak{I} exista para esse estado, ela não é relevante e será omitida. Vamos considerar apenas alguns casos particulares. Para $\alpha = \beta = \gamma = 0$, temos que

$$\begin{aligned} I_3 = & \frac{(1+7x)}{8} \ln(1+7x) - \frac{3(1-x)}{8} \ln(1-x) - \frac{4(1+x)}{8} \ln(1+x) \\ & - \frac{2(1+3x)}{8} \ln(1+3x), \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$\mathfrak{I} = I_3 + \frac{(1-x)}{2} \ln(1-x) + \frac{4(1+x)}{2} \ln(1+x) - \frac{(1+3x)}{2} \ln(1+3x). \quad (5.14b)$$

Na figura 5.1 o comportamento dessas quantidades é mostrado como uma função de x . Para estados puros ($x = 1$) mostra-se que $\mathfrak{I} = 0$, o que nos dá base para enunciar o seguinte resultado.

Resultado 1.—*Informação mútua é monogâmica para estados puros tripartidos.* A prova é dada da seguinte forma. Como ρ é um estado puro, então $S = 0$. A desigualdade Araki-Lieb¹ implica em $S_{AB} = S_C$, $S_{AC} = S_B$ e $S_{BC} = S_A$. Imediatamente implicando em $\mathfrak{I} = 0$ e

$$I_{AB:C} = I_{A:C} + I_{B:C}, \quad (5.15)$$

¹A desigualdade de Araki-Lieb é dada por $S_{XY} \geq |S_X - S_Y|$ [31].

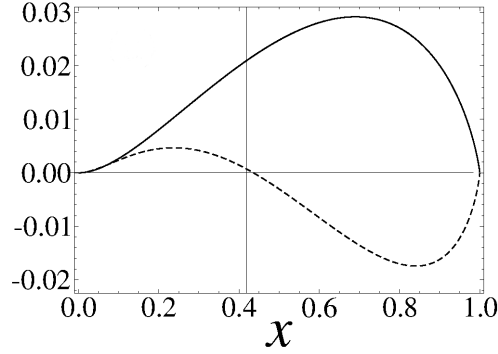


Figura 5.1: $I_3/4$ (linha sólida) e \mathfrak{J} (linha pontilhada) como uma função de x para o estado (5.13). Monogamia é violada por estados mistos com $x \gtrsim 0,43596$.

o que completa a prova. Dentro do contexto de *subaditividade forte*² da entropia de von Neumann, um trabalho recente encontrou a estrutura de estados que satisfazem a subaditividade forte com igualdade (veja [105] e suas referências). Dos cálculos anteriores, segue como um simples exercício [31] que estados puros tripartidos saturam ambas as formas de subaditividade forte, ou seja, $S_{AC} + S_{BC} = S_A + S_B$ e $S + S_B = S_{AB} + S_{BC}$.

Fica claro a partir da equação (5.12) que \mathfrak{J} é invariante sob permutações dos subsistemas, sendo essa uma expressão de aspecto global. Então, pode-se perguntar se esta quantidade é de alguma forma relacionada com correlações tripartidas genuínas. Para abordar esta questão minimizamos a equação (5.11) sob todas as permutações dos subsistemas, e obtemos através da equação (5.7) que

$$I_3 = \min_{(A,B,C)} (I_{A:C} + I_{B:C}) + \mathfrak{J}. \quad (5.16)$$

Utilizando o exemplo da equação (5.13), com $\alpha = \beta = \gamma = 0$, a figura 5.2 ilustra a validade dessa expressão.

Além de relacionar \mathfrak{J} com correlações tripartidas, a expressão (5.16) nos leva ao segundo resultado acerca da monogamia.

Resultado 2.—*Para um estado tripartido genérico, informação mútua é monogâmica se, e somente se, a quantidade de correlação genuína tripartida for grande o suficiente, ou*

²Para qualquer estado tripartido, a subaditividade forte é dada pelas seguintes desigualdades: $S_{XYZ} + S_Y \leq S_{XY} + S_{YZ}$ e $S_{XZ} + S_{YZ} \geq S_X + S_Y$ [104].

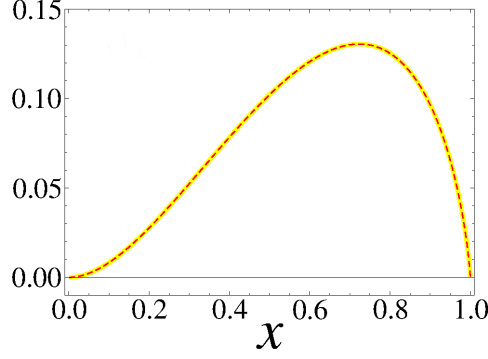


Figura 5.2: $I_3 - \mathfrak{I}$ (linha fina amarela) e $\min_{(A,B,C)} (I_{A:C} + I_{B:C})$ (linha pontilhada vermelha) como uma função de x para o estado (5.13).

seja,

$$I_3 \geq \min_{(A,B,C)} (I_{A:C} + I_{B:C}). \quad (5.17)$$

A prova imediatamente segue das equações (5.11) e (5.16). Além disso, como um corolário do Resultado 1, para estados puros tripartidos a igualdade se mantém em (5.17).

5.2 Fluxo de informação numa dinâmica de defasagem

Como discutimos no capítulo 2, sistemas interagentes trocam energia e coerência, porém, tipicamente o tempo de descoerência é muito menor que o tempo de relaxação, de forma que na seguinte análise focamos numa dinâmica não-dissipativa.

Considerando dois sistemas que não interagem, A e B , acoplados com um ambiente comum C através do Hamiltoniano total $H = H_A + H_B + H_C + H_I$, onde

$$H_I = \left(V_A \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes V_B \right) \otimes V_C \quad (5.18)$$

e V_X ($X = A, B, C$) é um operador atuando em \mathcal{H}_X . Para focar em uma dinâmica não-dissipativa, exigimos que $[V_X, H_X] = 0$, onde H_X é o Hamiltoniano livre do subsistema X . Como H_X é local, ele não contribui com a dinâmica das correlações e pode ser omitido. Também assumimos que A e B compartilham um estado inicialmente cor-

relacionado $\rho_{AB}(0)$, enquanto C está num estado de equilíbrio térmico $\rho_C = e^{-\beta H_C}/Z$, onde $Z = \text{Tr } e^{-\beta H_C}$, $T = (k_B \beta)^{-1}$ é a temperatura de equilíbrio e k_B é a constante de Boltzmann.

A dinâmica do sistema é governada pelo propagador $U = e^{-iH_I t/\hbar} = U_{AC} U_{BC}$, o qual nos dá

$$\rho(t) = U_{AC} U_{BC} \rho_{AB}(0) U_{BC}^\dagger U_{AC}^\dagger \rho_C, \quad (5.19)$$

onde $U_{XC} = e^{-iV_X \otimes V_C t/\hbar}$ ($X = A, B$). Dada a forma da interação e o fato que $[V_C, \rho_C] = 0$, obtemos os seguintes estados reduzidos

$$\rho_{XC}(t) = U_{XC} \rho_X(0) \otimes \rho_C U_{XC}^\dagger \quad (5.20)$$

e $\rho_C(t) = \rho_C$, onde $\rho_{A,B}(0) = \text{Tr}_{B,A} \rho_{A,B}(0)$. Segue que $S_{XC}(t) = S_{XC}(0) = S_X(0) + S_C(0)$ e $S_C(t) = S_C(0)$. Portanto,

$$I_{X:C}(t) + \mathcal{I}_X(t) = \mathcal{I}_X(0) \quad (X = A, B). \quad (5.21)$$

Esta relação expressa a noção de fluxo de informação: qualquer diminuição da informação armazenada localmente em X é acompanhada de um aumento da informação mútua entre X e C . Em outras palavras, a informação local diminui por causa do reservatório C , agora correlacionado com X , e através de medidas em C pode-se obter informação sobre X . Além disso, porque $S(t) = S(0) = S_{AB}(0) + S_C(0)$ tem-se que $I_{AB:C}(t) = \mathcal{I}_{AB}(0) - \mathcal{I}_{AB}(t)$ e

$$\mathfrak{J}(t) = I_{A:B}(0) - I_{A:B}(t). \quad (5.22)$$

Como o sistema é fechado, a informação do estado (5.4) é constante e pode ser escrita como $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}_{\text{LOC}}(0) + I_{A:B}(0)$. Então, podemos reescrever a equação (5.4) como

$$I_{X:Y}(t) + I_{XY:Z}(t) = I_{A:B}(0) + \delta \mathcal{I}_{\text{LOC}}(t), \quad (5.23)$$

onde

$$\delta\mathcal{I}_{\text{LOC}}(t) \equiv \mathcal{I}_{\text{LOC}}(0) - \mathcal{I}_{\text{LOC}}(t) \quad (5.24)$$

e (X, Y, Z) assume qualquer permutação de (A, B, C) . Os resultados acima nos permitem construir um esboço do fluxo de informação no nosso modelo de defasagem. Primeiro, temos que

$$I_{A:C}(0) = I_{B:C}(0) = I_{AB:C}(0) = \mathfrak{J}(0) = I_3(0) = 0. \quad (5.25)$$

Em virtude da positividade da informação mútua, a equação (5.21) implica que $\mathcal{I}_X(t) \leq \mathcal{I}_X(0)$ ($X = A, B$), onde $\mathcal{I}_C(t) = \mathcal{I}_C(0)$. *Estas relações mostram que a informação armazenada localmente irá geralmente decrescer com a evolução do sistema no tempo*, isto é, $\delta\mathcal{I}_{\text{LOC}}(t) \geq 0$. Pela equação (5.23) vemos que, como consequência, a informação reaparece entre partes distintas como informação mútua. De fato, a equação (5.23) implica que nem toda informação bipartida pode desaparecer simultaneamente quando $I_{A:B}(0) > 0$. Além disso, *a soma de correlações bipartidas tem que aumentar com a diminuição da informação local*. Finalmente, se C age como um reservatório típico, então esperamos que $I_{A:B}(t)$ diminua com o tempo, para produzir, de acordo com a equação (5.22), $\mathfrak{J}(t) > 0$. Assim, assegura-se que durante a dinâmica a informação mútua é monogâmica e pela equação (5.16), vemos também que $I_3(t) > 0$. Para acrescentar, nosso modelo de defasagem revela um cenário típico no qual (i) *informação local se transforma em informação mútua* e (ii) *correlações tripartidas genuínas emergem e asseguram a monogamia*.

Considere por um momento o caso no qual $\rho_{AB}(0)$ é um estado com marginais maximamente misturadas. A partir da equação (5.20), segue que

$$\rho_{XC}(t) = \rho_{XC}(0) = \rho_X(0) \otimes \rho_C = \mathbb{1}_X/d_X \otimes \rho_C. \quad (5.26)$$

Neste caso, não existe dinâmica de informação local, ou seja, $\delta\mathcal{I}_{\text{LOC}}(t) = 0$. Ademais, fica claro a partir da equação (5.21) que $I_{X:C}(t) = 0$. Portanto, pelas equações (5.16) e (5.22) podemos concluir que

$$I_3(t) = \mathfrak{J}(t) = I_{A:B}(0) - I_{A:B}(t). \quad (5.27)$$

Este resultado fornece uma maneira simples de encontrar a dinâmica de correlações tripartidas genuínas. Ele também nos dá a informação de que $I_3(t)$ irá tipicamente aumentar em banhos térmicos idealmente infinitos. Por outro lado, quando consideramos banhos finitos, o aumento em $I_3(t)$ pode não ser monotônico. De fato, pode-se suspeitar que devido a um eventual fluxo de informação, as correlações tripartidas irão temporariamente decrescer. Esta especulação é abordada na próxima seção com a ajuda de um modelo específico.

5.3 Estudo de caso: dois qubits em um reservatório bosônico finito

Agora estudamos a dinâmica de informação usando um modelo que permite uma análise analítica livre das simplificações usuais, como a aproximação de Born (acoplamento fraco) e Markov (sem efeitos de memória). Modelamos o banho finito como um conjunto de N modos harmônicos desacoplados, com Hamiltoniano livre

$$H_C = \hbar \sum_{k=1}^N \omega_k \hat{n}_k, \quad (5.28)$$

onde ω_k é a frequência do k -ésimo modo. O Hamiltoniano de acoplamento é construído como em (5.18) com

$$V_X = \hbar g_X \sigma_3^X \quad \text{e} \quad V_C = \sum_{k=1}^N g_k \hat{n}_k, \quad (5.29)$$

onde g_X é uma constante de acoplamento do qubit X com o banho, \hat{n}_k é o operador número do k -ésimo modo e g_k é a constante de acoplamento entre o modo k e os qubits. Os dois qubits estão sujeitos ao mesmo banho, mas a força de interação é controlada por g_X ($X = A, B$). A efetividade desse banho bosônico em produzir descoerência não-dissipativa foi demonstrada em [106].

O sistema de dois qubits é assumido ser preparado inicialmente num estado X com três parâmetros reais (2.55), com estados reduzidos dados por $\rho_X = \mathbb{1}_X/2$. A partir da análise introduzida na seção anterior temos que a geração de correlações tripartidas genuínas

pode ser quantificada através da equação (5.27). Calculando o estado total evoluído no tempo, e traçando fora o reservatório, temos (usando a base computacional)

$$\rho_{AB}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \delta(t) \\ 0 & \beta & \gamma(t) & 0 \\ 0 & \gamma^*(t) & \beta & 0 \\ \delta^*(t) & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+c_3}{4}, & \gamma(t) &= \frac{(c_1+c_2)}{4} \theta_-(t), \\ \beta &= \frac{1-c_3}{4}, & \delta(t) &= \frac{(c_1-c_2)}{4} \theta_+(t), \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\theta_{\pm}(t) = \prod_{k=1}^N \left(\frac{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}}{1 - e^{-[\beta \hbar \omega_k + 2i(g_A \pm g_B) g_k t]}} \right). \quad (5.32)$$

Os cálculos detalhados desse modelo podem ser encontrados em [64]. É interessante notar que toda a influência do banho térmico no sistema de dois qubits está codificado nas funções $\theta_{\pm}(t)$, que dependem do número N de modos, suas frequências e os parâmetros de acoplamento (g_k , g_A e g_B). Embora os elementos da antidiagonal sejam complexos, eles podem ser transformados em reais através da transformação unitária local $e^{-i\phi_A \sigma_3^A} \otimes e^{-i\phi_B \sigma_3^B}$ [107], com $\phi_A = -\frac{(\varphi_+ + \varphi_-)}{4}$ e $\phi_B = -\frac{(\varphi_+ - \varphi_-)}{4}$, onde $\theta_{\pm} = |\theta_{\pm}| e^{i\varphi_{\pm}}$. Este procedimento leva o estado (5.30) à classe de estados de Bell-diagonais de três parâmetros, i.e., $\rho_{AB}(t) = \rho_{\vec{c}'}$, onde $\vec{c}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$ e

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1 \left(\frac{|\theta_-| + |\theta_+|}{2} \right) + c_2 \left(\frac{|\theta_-| - |\theta_+|}{2} \right), \\ c'_2 &= c_1 \left(\frac{|\theta_-| - |\theta_+|}{2} \right) + c_2 \left(\frac{|\theta_-| + |\theta_+|}{2} \right), \\ c'_3 &= c_3. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Como uma consequência, tem-se que $\rho_X(t) = \mathbb{1}_X/2$, o que implica que não haverá dinâmica da informação local. Os cálculos mostram que o estado localmente transformado é

idêntico a (5.30) onde substituímos as funções $\theta_{\pm}(t)$ por seus módulos,

$$|\theta_{\pm}(t)| = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\text{sen}^2[(g_A \pm g_B) g_k t]}{\text{senh}^2(\beta \hbar \omega_k/2)} \right)^{-1/2}. \quad (5.34)$$

Embora os modelos gerais de banhos assumem que as frequências de seus constituintes obedecem uma certa distribuição, vamos assumir aqui, como uma hipótese mais simples, que $\omega_k = \omega_0$. Essa hipótese é justificada pelo fato—verificado numericamente—que uma distribuição para g_k é mais eficaz em causar descoerência do que uma distribuição para ω_k com $g_k = g_0$. Para a análise presente vamos utilizar uma distribuição espectral Gaussiana para os parâmetros de acoplamento,

$$g_k = g_0 \exp\left(-\frac{k^2}{\delta^2}\right), \quad (5.35)$$

onde δ controla a largura da distribuição e g_0 dá a intensidade do acoplamento.

Aqui obtemos os aspectos principais do nosso modelo de reservatório. Primeiro, calculamos o tempo de descoerência. Para isso, consideramos um regime de tempos curtos, $(g_A \pm g_B)tg_k \ll 1$, o que permite que a equação (5.34) seja aproximada para

$$|\theta_{\pm}(t)| \cong \exp\left[-\sum_k \frac{(g_A \pm g_B)^2 g_k^2 t^2}{2\text{senh}^2(\beta \hbar \omega_0/2)}\right]. \quad (5.36)$$

Este resultado pode ser reescrito como $|\theta_{\pm}(t)| \cong e^{-t^2/t_D^2}$, onde t_D —o tempo de descoerência—é dado por

$$t_D = \frac{\text{senh}(\beta \hbar \omega_0/2)}{g G}, \quad (5.37)$$

onde $g = \min\{|g_A + g_B|, |g_A - g_B|\}$ e $G^2 = \frac{1}{2} \sum_k g_k^2$. No limite $N \rightarrow \infty$, pode-se mostrar que

$$G^2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} g_0^2 \delta \xi, \quad \text{onde} \quad \xi = \frac{\vartheta_3(0, \exp(-2/\delta^2)) - 1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \leq \frac{1}{2} \quad (5.38)$$

e $\vartheta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz}$ é uma função teta de Jacobi. Segue que $G^2 \leq \sqrt{\frac{\pi}{32}} g_0^2 \delta$, igualdade se mantendo estritamente para $\delta \rightarrow \infty$ e aproximadamente para $\delta \gg 1$. A

conexão com ambientes Ôhmicos pode ser estabelecida assumindo $G^2 = \int_0^\infty d\omega J(\omega)$ para uma densidade espectral do tipo Ôhmico $J(\omega) = \eta \frac{\omega^s}{\omega_c^{s-1}} e^{-\omega/\omega_c}$, onde ω_c é a frequência de corte, η é uma constante de acoplamento adimensional e s é um parâmetro que regula quando o reservatório é sub-Ôhmico ($s < 1$), Ôhmico ($s = 1$) ou super-Ôhmico ($s > 1$) [108]. Realizando a integração em ω obtemos a relação

$$\sqrt{\frac{\pi}{32}} g_0^2 \delta = \omega_c^2 \eta \Gamma(1+s), \quad (5.39)$$

onde Γ é a função Gamma. Então, para $s > -1$ as identificações $\omega_c^2 \propto \delta$ e $\eta \propto g_0^2$ nos permite simular um banho Ôhmico. Considerando N finito, entretanto, podemos verificar que

$$G \cong \frac{g_0}{2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta - 1 \right)^{1/2} \quad (5.40)$$

é uma aproximação bastante boa para $0 \leq \delta \leq N$. Claramente, descoerência é mais destrutiva quando δ é grande. Em particular, podemos usar $\delta \sim N$ (para $N \geq 2$). Neste caso, dado que $G \propto N^{1/2}$, o tempo de descoerência é escalonado com $N^{-1/2}$, diminuindo com o número de modos, como esperado. Além disso, t_D diminui com a temperatura. Para baixas temperaturas, entretanto, descoerência ainda pode ocorrer, se N é grande o suficiente. Podemos quantificar a competição entre N e T da seguinte maneira. Primeiro escrevemos

$$|\theta_\pm(t)| = \left[\prod_k \left(1 + \frac{x_k^2}{y_0^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (5.41)$$

com $x_k = \sin[(g_A \pm g_B)tg_k]$ e $y_0 = \sinh(\beta\hbar\omega_0/2)$. Dado que $|x_k| \leq 1$, pode-se mostrar que $|\theta_\pm(t)| \geq |\theta|_{\min}$, onde

$$|\theta|_{\min} = \text{tgh}^N \left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2} \right) \leq 1. \quad (5.42)$$

Este valor é alcançado por $|\theta_\pm(t)|$ para $t > t_D$. Portanto, estritamente falando, a descoerência não é completa para N finito. Entretanto, sempre é possível fazer o mínimo dessa função arbitrariamente pequeno com o aumento da temperatura.

Na figura 5.3, $|\theta_-(t)|$ e $I_3(t)$ são mostradas como uma função do tempo para um banho térmico muito pequeno ($N = 10$). Note que *recorrências* ocorrem para baixas temperaturas e uma densidade espectral suave (a-d). É óbvio pela equação (5.27) que correlações tripartidas aumentam com o decréscimo das correlações entre os qubits. Embora as simulações tratem do estado de Werner $c_{1,2,3} = -0,8$, o cenário ilustrado é típico porque a dinâmica da descoerência é governada principalmente por $|\theta_{\pm}(t)|$. A dependência com o estado inicial somente se reflete na amplitude de I_3 .

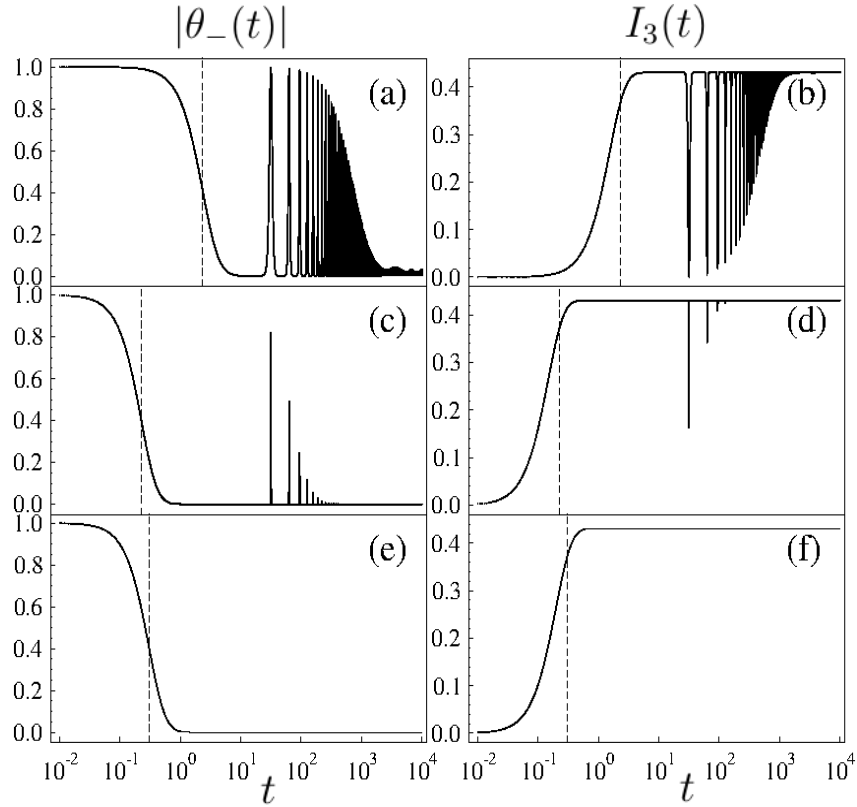


Figura 5.3: $|\theta_-(t)|$ (primeira coluna) e $I_3(t)$ (segunda coluna) como uma função do tempo (em escala logarítmica) para $N = 10$, $c_{1,2,3} = -0,8$, $\hbar = \omega_0 = 1$, $g_A = 1$, $g_B = 2$ e $g_0 = 0,1$. Os parâmetros variando são a temperatura e a largura da distribuição espectral: (a,b) $\beta = 1$ e $\delta = 10N$; (c,d) $\beta = 0,1$ e $\delta = 10N$; (e,f) $\beta = 0,1$ e $\delta = N$. Todos os parâmetros são dados em unidades arbitrárias. A linha vertical em cada quadro representa o tempo de descoerência (5.37).

Partindo do fato que $\rho_X(t) = \rho_X(0) = \mathbb{1}_X/2$ e com as equações (5.23) e (5.27),

temos que

$$I_{AB:C}(t) = I_3(t). \quad (5.43)$$

Esse resultado mostra que as correlações tripartidas emergem do fluxo de informação inicialmente armazenada em AB para C . Além disso, como $I_{X:C}(t) = 0$, o reservatório C não sabe nada sobre A e B individualmente, somente sobre AB .

5.3.1 Correlações quânticas versus correlações clássicas

Dado que $I_{A:B}(t) = I_{A:B}(0) - I_3(t)$, fica claro que as correlações totais entre A e B diminuem com o tempo. Para ver o que acontece com o fluxo de correlações clássicas e quânticas separadamente, calculamos a discórdia quântica³ D_{AB}^{\leftarrow} (2.35), e a informação acessível $J_{AB}^{\leftarrow} = I_{A:B} - D_{AB}^{\leftarrow}$ (uma medida de correlações clássicas [12]), que é dada por [71]

$$J_{AB}^{\leftarrow}(c_t) = \frac{(1 + c_t)}{2} \ln(1 + c_t) + \frac{(1 - c_t)}{2} \ln(1 - c_t),$$

onde $c_t = \max\{|c'_1|, |c'_2|, |c'_3|\}$. A partir da equação (5.33) vemos que $|c'_{1,2}| \leq |c_{1,2}|$. Portanto, para qualquer estado inicial tal que $|c_3| \geq |c_{1,2}|$, temos que $c_t = |c_3|$ e, assim, $J_{AB}^{\leftarrow}(t) = J_{AB}^{\leftarrow}(0)$. Neste caso, $I_{A:B}(t) = D_{AB}^{\leftarrow}(t) + J_{AB}^{\leftarrow}(0)$, o que implica, pela equação (5.27), que

$$I_3(t) + D_{AB}^{\leftarrow}(t) = D_{AB}^{\leftarrow}(0). \quad (5.44)$$

Este resultado identifica uma classe de estados para os quais qualquer aumento nas correlações tripartidas genuínas ocorre com o custo da perda de correlações quânticas entre A e B . Para estados tais que $|c_3| < |c_{1,2}|$, a informação acessível diminui com o tempo até $|c_3| > |c'_{1,2}|$, uma condição que é invariavelmente alcançada quando a descoerência aparece. Neste estágio, a informação acessível assume o valor constante $J_{AB}^{\leftarrow}(|c_3|)$ e a “relação de conservação” (5.44) começa a aparecer (veja figura 5.4). Foi demonstrado recentemente que o instante t_{BP} , no qual a informação acessível subitamente alcança um valor

³Como a discórdia quântica é assimétrica, a flecha foi introduzida para denominar que a otimização (em respeito à medida) foi realizada em apenas um dos qubits e não em ambos (como ocorre com a discórdia simétrica).

constante, sinaliza o aparecimento da *base ponteiro*⁴, um elemento crucial na abordagem do problema da medida [110]. No nosso modelo, t_{BP} pode ser calculado analiticamente quando $c_2 = -\epsilon c_1$ com $\epsilon = \pm 1$, neste caso temos que $|c'_{1,2}| = |c_1||\theta_\epsilon|$. Impondo que $|c'_{1,2}| = |c_3|$ e usando a aproximação de tempos curtos para $|\theta_\epsilon(t_{BP})|$ obtemos que

$$t_{BP}^2 = t_D^2 \ln \frac{|c_1|}{|c_3|}, \quad (5.45)$$

onde t_D pode ser calculado via equação (5.37) com $g = |g_A + \epsilon g_B|$. Claramente, uma transição súbita irá ocorrer somente se $|c_1| > |c_3|$.

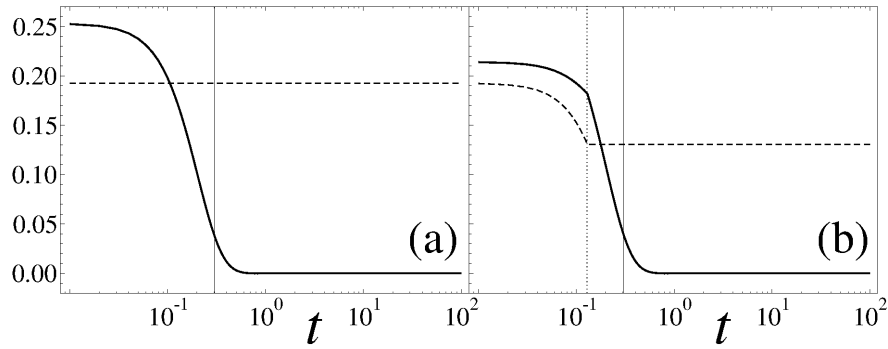


Figura 5.4: Discórdia quântica $D_{AB}^-(t)$ (linha sólida) e informação acessível $J_{AB}^-(t)$ (linha tracejada) em função do tempo (em escala logarítmica) para os mesmos parâmetros da figura 5.3-(e,f). Em (a) $c_{1,2,3} = -0,6$ e em (b) $c_{1,2} = -0,6$ e $c_3 = -0,5$. A linha vertical sólida descreve o tempo de descoerência (5.37), enquanto a linha vertical pontilhada em (b) descreve o tempo de mudança súbita (5.45). O valor constante da informação acessível é dada por $J_{AB}^-(|c_3|)$.

Também calculamos o emaranhamento de formação (2.33). Os resultados mostram que o emaranhamento tipicamente apresenta morte súbita (como mostramos no capítulo anterior), o que acontece logo depois do tempo de descoerência, mas pode eventualmente reaparecer para regimes tais como os da figura 5.3-(a-d).

5.3.2 Uma medida de não-Markovianidade

Agora discutimos as condições sob as quais nosso modelo de reservatório é não-Markoviano. Para este fim, introduzimos uma testemunha de não-Markovianidade (NM)

⁴Os estados ponteiros são estados quânticos que são menos perturbados pela descoerência que outros estados e são equivalentes quânticos dos estados clássicos do sistema depois que a descoerência ocorreu através da interação com o ambiente [109].

que é inspirada por uma medida bem estabelecida [111–113], mas tem a vantagem de ser facilmente calculada para o nosso modelo. Aqui associamos a noção de NM com a capacidade do processo em permitir o fluxo de correlações do reservatório para o sistema. No nosso modelo, isto é sinalizado por recorrências em $I_{AB:C}(t)$, a qual mede o quanto o reservatório C obtém de informação do sistema AB . Então, pela equação (5.43) e os resultados mostrados na figura 5.3, podemos concluir que os mecanismos da NM podem ser investigados diretamente com $|\theta_{\pm}(t)|$, uma quantidade que é independente do estado inicial. Por simplicidade, trocamos $|\theta_{\pm}(t)|$ por (5.41). Se $y_0 \gg x_k$, então

$$|\theta(t)| \cong e^{-\sum_k x_k^2/2y_0^2}. \quad (5.46)$$

Este resultado pode ser convenientemente escrito como

$$|\theta(t)| \cong \exp \left(-\frac{N}{4y_0^2} [1 - \langle \mathbf{c} \rangle(t)] \right), \quad (5.47)$$

onde

$$\langle \mathbf{c} \rangle(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(2gg_k t). \quad (5.48)$$

Como recorrências em $|\theta(t)|$ são sintomas de NM, definimos nossa medida como

$$\mathcal{N}_M(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' |\theta(t')|. \quad (5.49)$$

Esta quantidade aumenta com o número de recorrências ocorrendo no instante t . Usando novamente o limite de baixas temperaturas ($y_0^2 \gg N$) expandimos a equação (5.47), e calculando a integral temporal analiticamente, o resultado volta para a forma exponencial, que é dada por

$$\mathcal{N}_M(t) = \exp \left\{ -\frac{N[1 - \overline{\langle \mathbf{c} \rangle}(t)]}{4\text{senh}^2(\beta \hbar \omega_0/2)} \right\}, \quad (5.50)$$

onde

$$\overline{\langle \mathbf{c} \rangle}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\text{sen}(2gg_k t)}{2gg_k t}. \quad (5.51)$$

Essas expressões valem para o regime de acoplamento fraco. Elas revelam as condições para que ocorra NM. Quando $g = 0$ tem-se que $\overline{\langle \mathbf{c} \rangle}(t) = 1$ e a NM do processo é máxima ($\mathcal{N}_M(t) = 1$), como esperado. Isso mostra que a NM é favorecida pelo acoplamento fraco. Para $g > 0$, dois regimes temporais são significativos. Enquanto que para o regime de tempo curto, a NM é influenciada pela distribuição espectral g_k , no equilíbrio esta distribuição não tem influência. De fato, fica claro que $\overline{\langle \mathbf{c} \rangle}(\infty) = 0$ e

$$\mathcal{N}_M(\infty) = \exp \left(-\frac{N}{4\sinh^2[\beta \hbar \omega_0/2]} \right). \quad (5.52)$$

Essa fórmula indentifica os parâmetros físicos que crucialmente influenciam a NM. Vê-se que a NM pode ser significativamente aumentada para banhos pequenos (N pequeno) e baixas temperaturas. Isso também foi observado em sistemas clássicos acoplados a banhos finitos [114, 115]. Para as simulações mostradas na figura 5.3, nossa medida resulta em $\ln \mathcal{N}_M = -9,206$ na figura 5.3(a), $\ln \mathcal{N}_M = -999,086$ na figura 5.3(c) e $\ln \mathcal{N}_M = -999,212$ na figura 5.3(e), para $t = 10^4$, sugerindo que os processos nas figuras 5.3(c) e 5.3(e) são fortemente Markovianos. Embora esses resultados concordem com o cenário ilustrado na figura 5.5, estas simulações são obtidas no regime de altas temperaturas, para as quais não é claro se nossa medida pode dar resultados precisos. Na figura 5.5 ilustramos o comportamento de \mathcal{N}_M como uma função do inverso da temperatura β e o número de modos N para um dado regime de acoplamento. A figura 5.5 nos mostra um quadro simples da dependência da não-Markovianidade com o número de modos do reservatório e com a temperatura. Ou seja, a não-Markovianidade é favorecida quando o reservatório possui poucos modos, mesmo para temperaturas mais altas. O caso no qual o número de modos é grande, vemos que a não-Markovianidade só ocorrerá se as temperaturas forem baixas o suficiente.

Neste capítulo conduzimos uma análise do fluxo de informação no contexto de uma dinâmica de defasagem induzida por banhos finitos. Começamos derivando alguns resultados para a informação mútua. Especificamente, mostramos que a informação mútua é monogâmica (i) para todos os estados puros tripartidos e (ii) para estados mistos tripartidos para os quais a quantidade de correlações tripartidas genuínas é maior que um certo limite inferior. Além de complementar estudos recentes sobre monogamia das correlações [98, 103, 116], nossos resultados estabelecem uma conexão entre a monogamia

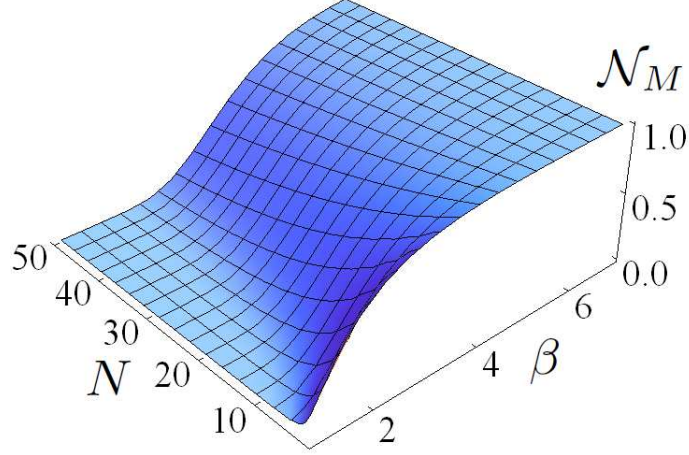


Figura 5.5: Não-Markovianidade \mathcal{N}_M como uma função do inverso da temperatura β e o número de modos N para $\hbar = \omega_0 = 1$, $g_A = 1$, $g_B = 2$, $g_0 = 0,1$ e $\delta = 10N$. Nesta simulação usamos $t = 10^6$. Todos os parâmetros são dados em unidades arbitrárias. A não-Markovianidade é favorecida para poucos reservatórios e baixas temperaturas.

da informação mútua e correlações tripartidas. A respeito da dinâmica de defasagem, encontramos um cenário típico no qual a informação associada aos subsistemas se deslocaliza pelo sistema. Além disso, nossos resultados mostram que correlações tripartidas genuínas irão geralmente aumentar, deste modo assegurando a monogamia para a informação mútua. Por fim, apresentamos um estudo analítico para um modelo de dois qubits não interagentes acoplados com um banho térmico finito não-dissipativo. Além de ilustrar nossas previsões para um modelo geral de defasagem, este estudo de caso permitiu a observação de dois aspectos relevantes. Primeiro, verificamos a existência de uma relação de conservação envolvendo a quantidade de correlações tripartidas e a quantidade de correlações quânticas num sistema de dois qubits. Segundo, calculamos uma medida de não-Markovianidade que revelou uma dependência quantitativa do processo de descoerência com o número de modos de um banho térmico, a temperatura de equilíbrio e a distribuição espectral. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em [117].

Capítulo 6

Correlações sistema-reservatório para estados de dois qubits acoplados a banhos térmicos

No capítulo anterior discutimos a transferência de informação em um sistema tripartido, através da análise da monogamia da informação mútua para esse tipo de estado. Nesse sentido surge a seguinte questão: existe também uma relação de conservação para emaranhamento quando acoplamos um sistema de interesse a um ambiente? Parece natural assumir que a perda de emaranhamento em um sistema aberto é acompanhada pelo surgimento (*build-up*) de emaranhamento com o ambiente. Pode-se pensar numa transferência de emaranhamento do estado local para o estado total. Isto é certamente verdade para um estado total puro. Entretanto, para um banho de temperatura finita essa afirmação é menos óbvia. Além disso, para esse tipo de banho é um desafio provar emaranhamento ou separabilidade para o estado total.

Outra questão interessante é se as correlações sistema-reservatório (SR) são de natureza clássica ou quântica. Em geral, é difícil responder a esta questão para ambientes reais. Portanto, para entender totalmente o processo de descoerência e sermos aptos a controlar recursos de informação e computação quântica, é desejável descrever a dinâmica detalhada das correlações quânticas SR. Uma possibilidade é extrair, por exemplo, informação sobre as correlações SR usando relações de monogamia para o sistema principal [117, 118], como fizemos no capítulo anterior. Uma descrição mais completa da dinâmica total, entretanto, é obtida do estado total (sistema mais ambiente) usando uma

base coerente e uma representação parcial do operador densidade total [119, 120].

Além disso, vale a pena mencionar que as correlações quânticas SR dependem de uma dilação fisicamente apropriada de um qubit sob um canal de defasagem (*dephasing channel*) – ou seja, um qubit numa dinâmica descoerente – onde para ambientes diferentes obtemos a mesma dinâmica de defasagem para o sistema reduzido. Em outras palavras, diferentes sistemas totais e correlações SR levam à mesma dinâmica reduzida. Portanto, para investigar correlações SR, é importante escolher a dilação apropriada para o sistema total.

Aqui estamos interessados em um estudo detalhado de como as correlações SR surgem quando descoerência e perda de emaranhamento ocorrem no sistema central. Para isso analisamos o modelo de dois qubits, acoplando um deles a um ambiente de natureza descoerente. Esta é uma extensão de investigações anteriores [32, 33] onde somente um qubit foi acoplado a banhos térmicos compostos por osciladores harmônicos. De fato, como esse é um modelo com solução analítica, conseguimos obter condições para separabilidade e emaranhamento SR e compará-las com o emaranhamento presente no sistema de dois qubits.

Primeiro iremos discutir a dilação de um qubit sob defasagem para diferentes ambientes. Após, iremos apresentar nosso modelo e a expressão exata para estado total do sistema. Usando esta expressão construímos critérios para separabilidade e emaranhamento entre o sistema e o ambiente. Apresentamos alguns resultados para estados de Werner inicialmente distintos e diferentes constantes de acoplamento, e depois discutimos emaranhamento em diferentes bipartições.

6.1 Dilação para um qubit sob canal de defasagem

De maneira a estudar o surgimento de correlações SR, precisamos especificar uma realização física do ambiente e da interação SR. Mais precisamente, aqui não estamos somente interessados em correlações gerais mas em emaranhamento SR. De qualquer modo, precisamos determinar o estado total SR. Localmente, no contexto de mapas completamente positivos e preservadores do traço, um único qubit sob um canal de defasagem na

base computacional é dado pelo seguinte canal quântico [31]

$$\rho \rightarrow \rho' = \mathcal{E}[\rho] = \frac{1 + \sqrt{p}}{2} \rho + \frac{1 - \sqrt{p}}{2} (\sigma_3 \rho \sigma_3), \quad (6.1)$$

com a terceira matriz de Pauli σ_3 , ou, na notação matricial

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \rho' = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \sqrt{p} \rho_{01} \\ \sqrt{p} \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Aqui, o elemento real p , com $0 \leq p \leq 1$, assume o papel do parâmetro de defasagem (probabilidade de ocorrer descoerência): $p = 1$ corresponde a nenhuma defasagem, enquanto $p = 0$ descreve a perda total de coerência. Frequentemente, p será alguma função (decrescente) do tempo, dependendo da constante de acoplamento e, para um banho térmico, da temperatura do ambiente.

A *dilação* (*dilation*) de um qubit é dada pela realização de operações quânticas num sistema total composto pelo qubit mais um ambiente acoplado, de forma que obtemos a dinâmica do qubit (sistema reduzido) após realizar a operação do traço sob todos os graus de liberdade desse ambiente. Logo, do ponto de vista *local* (6.1), não se pode obter nenhuma conclusão sobre correlações SR. Precisamos especificar a dinâmica total subjacente (U_T) e o estado inicial do ambiente (reservatório) ρ_R . Então, a dilação

$$\rho' = \mathcal{E}[\rho] = \text{Tr}_R \left(U_T (\rho \otimes \rho_R) U_T^\dagger \right) \quad (6.3)$$

nos permite estudar as correlações SR. Claramente, dependendo da dilação escolhida, diferentes cenários de correlação SR são possíveis, como vamos mostrar abaixo.

Para um qubit puro sob defasagem estudado aqui, sem perda de generalidade, a evolução unitária total pode ser escrita na forma [121]

$$U_T = |0\rangle\langle 0| \otimes 1_R + |1\rangle\langle 1| \otimes U_R, \quad (6.4)$$

com os dois estados do qubit $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e um operador de evolução unitária U_R do ambiente, condicionado no estado $|1\rangle$ do qubit. Então, qualquer dilação do qubit sob defasagem é totalmente determinada pelo estado inicial ρ_R e um operador de evolução unitária U_R do

ambiente. Como iremos ver, para a construção de emaranhamento SR, a pureza do estado inicial do ambiente é de grande relevância.

6.1.1 Estado inicial do ambiente puro: dilação emaranhada

Frequentemente, um estado *puro* do ambiente $\rho_R = |0_R\rangle\langle 0_R|$ é assumido [121–124]. Então, por construção, a dinâmica do estado total é inteiramente determinada a partir de duas equações

$$\begin{aligned} U_T|0\rangle|0_R\rangle &= |0\rangle|0_R\rangle, \\ U_T|1\rangle|0_R\rangle &= |1\rangle\left(\sqrt{p}|0_R\rangle + \sqrt{1-p}|1_R\rangle\right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde a relação

$$U_R|0_R\rangle = \sqrt{p}|0_R\rangle + \sqrt{1-p}|1_R\rangle \quad (6.6)$$

define p e o estado do ambiente $|1_R\rangle$ no lado direito da equação (negligenciamos uma possível, porém irrelevante fase). Então, para um estado inicial *puro* do ambiente $|0_R\rangle$, somente um estado ortogonal do ambiente $|1_R\rangle$ (como definido em (6.6)) é relevante e o ambiente pode ser efetivamente descrito por um único qubit, como em [122–124]. Esta dilação do ambiente de um único qubit é então definida pelas duas escolhas

$$\begin{aligned} \rho_R &= |0_R\rangle\langle 0_R|, \\ U_R &= \sqrt{p} \sigma_3 + \sqrt{1-p} \sigma_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

É fácil mostrar que a transposta parcial do estado SR de dois qubits tem o seguinte determinante

$$\det\{\rho_T^{\text{PT}}\} = -(1-p)^2 \rho_{00} \rho_{11} |\rho_{01}|^2. \quad (6.8)$$

Usando o critério de Peres, concluímos que, começando com um estado inicial do ambiente puro $|0_R\rangle$, o estado de dois qubits SR efetivo será emaranhado para $p < 1$ e $\rho_{01} \neq 0$ inicial, isto é, sempre que alguma coerência inicial está presente e a defasagem realmente acontece.

6.1.2 Estado inicial do ambiente misto: dilação separável

Tal emaranhamento SR pode não aparecer quando o estado inicial do ambiente é *misto* [32, 33]. Para dar um exemplo simples, considere novamente uma dilação de um único qubit do canal quântico (6.1), agora com

$$\begin{aligned}\rho_R &= \frac{1+\sqrt{p}}{2}|0_R\rangle\langle 0_R| + \frac{1-\sqrt{p}}{2}|1_R\rangle\langle 1_R|, \\ U_R &= \sigma_3.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Em contraste à dilação pura (6.7), onde o parâmetro p pode ser interpretado como uma representação do tempo, aqui p deve ser interpretado como uma medida da temperatura inicial do ambiente ($p \rightarrow 1$ correspondendo a $T \rightarrow 0$ e vice versa) e a dinâmica evolui para um tempo fixo. Como na equação (6.7), é fácil de verificar que (6.9) é uma dilação válida para a defasagem pura, levando ao mapa completamente positivo (6.1) para o estado reduzido do qubit. Agora, usando (6.4), e em contraste à dilação prévia baseada em (6.7), o estado total é separável para todo p

$$\rho_T = \frac{1+\sqrt{p}}{2}\rho \otimes |0_R\rangle\langle 0_R| + \frac{1-\sqrt{p}}{2}(\sigma_3\rho\sigma_3) \otimes |1_R\rangle\langle 1_R|,\tag{6.10}$$

isto é, nenhum emaranhamento entre o sistema (qubit) e o reservatório surge.

Concluimos dessas considerações que, de maneira a estudar emaranhamento SR, é crucial escolher uma dilação fisicamente apropriada. A questão é mais envolvente para um estado inicial do ambiente misto: mesmo para defasagem não podemos mais esperar conseguir descrever o ambiente por um qubit efetivo. De fato, a ação de U_T (ou U_R em (6.4)) já não é restrita a um estado do ambiente único $|0_R\rangle$. Logo, em geral, o espaço de Hilbert dinamicamente relevante já não pode mais abranger somente dois estados como em (6.6).

Na sequência, estudamos um sistema de *dois qubits* acoplado a um ambiente com graus de liberdade infinito e inicialmente em um estado térmico (misto). Como o estado total não é nem um estado de dois qubits, nem um estado Gaussiano, a detecção de emaranhamento é uma questão não-trivial e será baseada na negatividade da transposta parcial [58].

6.2 Modelo para o sistema-reservatório

Estudamos um estado inicial de dois qubits (qubits A e B). Um dos qubits (A) é acoplado a um ambiente (local) – representando um canal de defasagem de um único qubit em A . Na figura 6.1, podemos ver um esquema do modelo subjacente.

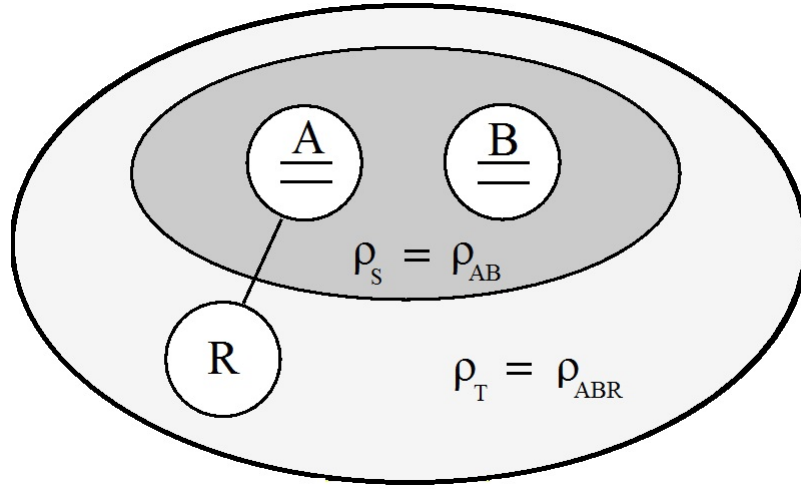


Figura 6.1: Esquema do modelo proposto. Sistema de dois qubits (AB) com o qubit A acoplado ao ambiente (R).

O ambiente escolhido é um banho de osciladores harmônicos, um modelo padrão para a dinâmica de sistemas quânticos abertos [125, 126]. Como visamos a defasagem pura, o Hamiltoniano do sistema parte do acoplamento do qubit A ao seu ambiente tem que ser diagonal na base (computacional) escolhida. Logo, para o Hamiltoniano total escrevemos $H_T = H_S + H_I + H_R$. Com Hamiltoniano do sistema

$$H_S = \frac{\hbar \Omega_A}{2} (\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) + \frac{\hbar \Omega_B}{2} (\mathbb{1}^A \otimes \sigma_3^B), \quad (6.11)$$

o Hamiltoniano do banho (bosônico) de osciladores harmônicos

$$H_R = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}, \quad (6.12)$$

rotulado por λ , com os operadores criação e aniquilação $a_{\lambda}, a_{\lambda}^{\dagger}$ (com as relações de comutação $[a_{\lambda}, a_{\mu}^{\dagger}] = \delta_{\lambda\mu}$), e interação diagonal (com respeito ao sistema) entre o qubit A e o

ambiente na forma

$$H_I = (\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) \otimes \sum_{\lambda} \hbar(g_{\lambda}^* a_{\lambda}^{\dagger} + g_{\lambda} a_{\lambda}). \quad (6.13)$$

$\Omega_{A,B}$ são as frequências características dos qubits e os coeficientes g_{λ} são as amplitudes de acoplamento entre o qubit A e cada modo do ambiente de frequência ω_{λ} .

Assumimos que o ambiente está inicialmente num estado térmico a uma temperatura T , expressa pelo operador densidade

$$\rho_R = \frac{1}{Z} \exp(-H_R/k_B T), \quad (6.14)$$

com função partição $Z = \text{Tr}[\exp(-H_R/k_B T)]$. O número de ocupação térmico é o usual $\bar{n}_{\lambda} = (\exp[\hbar\omega_{\lambda}/k_B T] - 1)^{-1}$. O estado inicial total é o produto

$$\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R, \quad (6.15)$$

com um estado inicial de dois qubits (possivelmente emaranhado) $\rho_S(0)$. De fato, no que se segue, devido a sua tratabilidade analítica, escolhemos estados X (2.53). Crucialmente, como já mencionamos anteriormente, a família de estados X é fechada sob dinâmica de defasagem.

O modelo escolhido nos permite derivar uma equação mestra exata [32] para o operador densidade reduzido $\rho_S(t) = \text{Tr}_R[\rho_T(t)]$,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\text{red}} = & -\frac{i\hbar\Omega_A}{2}[\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B, \rho_{\text{red}}] - \frac{i\hbar\Omega_B}{2}[\mathbb{1}^A \otimes \sigma_3^B, \rho_{\text{red}}] \\ & - \frac{\gamma_{\text{def}}(t)}{2} \left(\rho_{\text{red}} - (\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) \rho_{\text{red}} (\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde $\gamma_{\text{def}}(t)$ é a taxa de defasagem. A equação (6.16) toma a forma de uma equação mestra do tipo Lindblad [127] quando a taxa de descoerência (defasagem) é independente do tempo $\gamma_{\text{def}}(t) \equiv \gamma$. De fato, em termos da densidade espectral do ambiente $J(\omega) = \sum_{\lambda} |g_{\lambda}|^2 \delta(\omega - \omega_{\lambda})$, a taxa de defasagem é dada por

$$\gamma_{\text{def}}(t) = 4 \int_0^t ds \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \cotgh \left[\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right] \cos[\omega s]. \quad (6.17)$$

Note que esta taxa pode se tornar negativa no tempo para densidades espectrais não-triviais [33] e portanto o mapa completamente positivo $\rho(0) \rightarrow \rho(t)$ pode perder sua divisibilidade, e assim, representar um mapa não-Markoviano.

A solução da equação (6.16) com estado inicial (2.53) é o estado reduzido

$$\rho_{\text{red}}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14}\mathcal{G}_+(t) \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23}\mathcal{G}_-(t) & 0 \\ 0 & \rho_{23}^*\mathcal{G}_-^*(t) & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^*\mathcal{G}_+^*(t) & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

onde $\mathcal{G}_{\pm}(t) = \exp \left[i\hbar(\Omega_A \pm \Omega_B)t - \int_0^t \gamma_{def}(s)ds \right]$.

Emaranhamento no sistema de dois qubits pode ser calculado via *concorrência* (2.31), e para o nosso modelo ela é dada por

$$C(\rho_{\text{red}}(t)) = 2 \max \left\{ 0, |\rho_{23}||\mathcal{G}(t)| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}||\mathcal{G}(t)| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \right\}, \quad (6.19)$$

onde $|\mathcal{G}(t)| = |\mathcal{G}_{\pm}(t)|$. Claramente, devido à dinâmica de defasagem, C tipicamente decai com o tempo. Além disso, como é aparente a partir de (6.19), emaranhamento pode desaparecer inteiramente, mesmo para um tempo finito (finito $|\mathcal{G}(t)|$), ocorrendo morte súbita.

No nível reduzido, a perda de emaranhamento num sistema de dois qubits devido a um canal de defasagem local foi estudado em vários trabalhos [72, 128, 129]. Essa perda é acompanhada pela construção de correlações entre o sistema quântico aberto e seu ambiente. De maneira a estudar se o emaranhamento inicial com o sistema aberto de dois qubits somente desaparece ou se é transferido para o emaranhamento entre sistema e ambiente (ou para o emaranhamento entre os elementos do ambiente), precisamos determinar o estado total.

6.3 Dinâmica do estado total

O estudo de correlações entre o sistema e o ambiente de osciladores infinitos requer uma expressão para o estado total. Para isso, usamos uma base de estados coerentes para os graus de liberdade do ambiente e escolhemos a representação parcial P [120], também conhecida como representação P de Glauber-Sudarshan [130, 131]. Neste capítulo, seguiremos de perto uma análise semelhante para a defasagem de um único qubit apresentada em [32, 33]. O estado total é escrito como

$$\rho_T(t) = \int \frac{d^2 z}{\pi} \frac{1}{\bar{n}} e^{-|z|^2/\bar{n}} \hat{P}(t; z, z^*) \otimes |z\rangle\langle z|, \quad (6.20)$$

onde $z = (z_1, z_2, \dots)$ é um vetor de números complexos representando os estados coerentes do ambiente. Usamos a notação $d^2 z/\pi = (d^2 z_1/\pi)(d^2 z_2/\pi)\dots$ e $\exp[-|z|^2/\bar{n}]/\bar{n} = \prod_\lambda \exp[-|z_\lambda|^2/\bar{n}_\lambda]/\bar{n}_\lambda$. Note que para $t = 0$, temos o operador inicial $\hat{P}(t = 0) = \rho_S(0) = \rho_{\text{red}}(0)$ tal que (6.20) representa o estado fatorizado (6.15). É somente para $t > 0$ que $\hat{P}(t)$ se torna dependente de z e então, a expressão (6.20) representa um estado correlacionado SR.

A expressão (6.20) é uma solução da equação de von Neumann total. A evolução temporal da função parcial P é dada por¹

$$\hat{P}(t; z, z^*) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ \rho_{11} & 0 & 0 & \mathcal{B}_+ \rho_{14} \\ 0 & \mathcal{A}_+ \rho_{22} & \mathcal{B}_- \rho_{23} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_-^* \rho_{23}^* & \mathcal{A}_- \rho_{33} & 0 \\ \mathcal{B}_+^* \rho_{14}^* & 0 & 0 & \mathcal{A}_- \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

onde

$$\mathcal{A}_\pm(t) = \exp[-\alpha(t) \pm \{(a(t)|z) + (z|a(t))\}], \quad (6.22a)$$

$$\mathcal{B}_\pm(t) = \exp[-i\hbar(\Omega_A \pm \Omega_B)t] \exp[\beta(t) - \{(b(t)|z) - (z|b(t))\}]. \quad (6.22b)$$

¹Mais detalhes sobre a função parcial P e os cálculos realizados para encontrar a dinâmica desse estado se encontram no apêndice B.

Aqui $a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots)$ e $b(t)$ são vetores complexos dependentes do tempo,

$$a_\lambda(t) = \frac{1}{\bar{n}_\lambda} \int_0^t (g_\lambda e^{i\omega_\lambda s}) ds, \quad (6.23a)$$

$$b_\lambda(t) = \frac{2\bar{n}_\lambda + 1}{\bar{n}_\lambda} \int_0^t (g_\lambda e^{i\omega_\lambda s}) ds, \quad (6.23b)$$

com o produto escalar $(a(t)|z) \equiv \sum_\lambda a_\lambda^*(t) z_\lambda$ e

$$\alpha(t) = 2\mathbb{R} \int_0^t ds \int_0^s d\tau \left[\sum_\lambda \frac{1}{\bar{n}_\lambda} |g_\lambda|^2 e^{-i\omega_\lambda(s-\tau)} \right], \quad (6.24a)$$

$$\beta(t) = 2\mathbb{R} \int_0^t ds \int_0^s d\tau \left[\sum_\lambda \frac{2\bar{n}_\lambda + 1}{\bar{n}_\lambda} |g_\lambda|^2 e^{-i\omega_\lambda(s-\tau)} \right]. \quad (6.24b)$$

6.3.1 Separabilidade sistema-reservatório

A expressão (6.20) nos permite estudar correlações entre o sistema e o ambiente. Escrevendo $\rho_T(t)$ na representação parcial P , já é possível obter um critério *necessário* para separabilidade do estado total. Ou seja, se a função parcial $\hat{P}(t; z, z^*)$ for positiva semidefinida, ela é um operador densidade no espaço de Hilbert para todos os valores de z . Logo, o estado conjunto de dois subsistemas é separável por definição [32]. De forma que assim apresentamos o seguinte critério:

Critério de separabilidade: O estado total $\rho_T(t)$ na representação (6.20) é trivialmente separável enquanto a função parcial P for positiva semidefinida,

$$\hat{P}(t; z, z^*) \geq 0 \quad \forall \quad z_\lambda \in \mathbb{C}. \quad (6.25)$$

Sendo do tipo X, os autovalores de $\hat{P}(t; z, z^*)$ podem ser determinados analiticamente. Inicialmente, todos os autovalores são positivos e eles permanecem positivos enquanto

$$\mathcal{S}(T, t) \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\rho_{22}\rho_{33}}{|\rho_{23}|^2} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(T, t) \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\rho_{11}\rho_{44}}{|\rho_{14}|^2} \right), \quad (6.26)$$

onde definimos

$$\mathcal{S}(T, t) := \alpha(t) + \beta(t) = 4 \int_0^t ds \int_0^s d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) e^{\hbar\omega/k_B T} \cos[\omega(s - \tau)]. \quad (6.27)$$

Note que o critério de separabilidade é independente dos vetores dos estados coerentes do ambiente, z e z^* . Dependendo da escolha da densidade espectral $J(\omega)$, a equação (6.27) pode ser escrita em termos de funções especiais conhecidas. Assim, enquanto a equação (6.26) for satisfeita (em função do tempo e da temperatura), o estado total é separável e nenhuma correlação SR surge, mesmo quando o estado X de dois qubits inicial perde seu emaranhamento inicial.

6.3.2 Emaranhamento sistema-reservatório

A detecção de emaranhamento entre sistema e ambiente não é simples de ser determinada, pois o estado subjacente é de dimensão infinita e não do tipo Gaussiano. Para isso, usaremos o critério de Peres para verificar se existe emaranhamento entre o sistema e o reservatório, analisando se a transposta parcial $\rho_T^{\text{PT}}(t)$ do estado total tem um valor esperado $\varepsilon^{\text{PT}} = \langle \Psi | \rho_T^{\text{PT}} | \Psi \rangle$ negativo para algum estado total do sistema $|\Psi\rangle$ adequadamente escolhido. O critério de Peres é baseado na existência de autovalores negativos da transposta parcial para detectar emaranhamento, porém, os autovalores de $\rho_T^{\text{PT}}(t)$ são impossíveis de serem determinados, de forma que usamos a existência de um valor esperado negativo como critério de detecção de emaranhamento.

Expandimos $|\Psi\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi} e^{-|z|^2} |\psi(z^*)\rangle |z\rangle$ numa base de estados coerentes de Bargmann. Assim, de maneira a detectar emaranhamento, podemos encontrar um estado do sistema $|\psi(z^*)\rangle \sim \langle z | \Psi(t) \rangle$ analítico em z^* no espaço de Hilbert dos dois qubits, tal que

$$\varepsilon^{\text{PT}} \sim \int \frac{d^2z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{n}|z|^2} \langle \psi(z) | \hat{P}^T(z, z^*) | \psi(z^*) \rangle < 0. \quad (6.28)$$

Depois de alguma experimentação, escolhemos

$$|\psi(t, z^*)\rangle = \begin{pmatrix} r e^{-(z|a+b)/2 + i(\Omega_A + \Omega_B)t/2} \\ -s e^{-(z|a+b)/2 + i(\Omega_A - \Omega_B)t/2} \\ -t e^{(z|a+b)/2 - i(\Omega_A - \Omega_B)t/2} \\ u e^{(z|a+b)/2 - i(\Omega_A + \Omega_B)t/2} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Encontramos que, para a detecção de emaranhamento, o vetor (r, s, t, u) precisa ser determinado como o estado puro que tem a menor superposição com a transposta do estado

inicial do sistema de dois qubits.

Realizando a integral sobre os estados coerentes z_λ , encontramos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{PT}}(t) = & \frac{1}{\bar{n} + 1} \left[e^{-\alpha(t) + \frac{\bar{\mathcal{S}}(t)}{2}} (\rho_{11}|r|^2 + \rho_{22}|s|^2 + \rho_{33}|t|^2 + \rho_{44}|u|^2) \right. \\ & \left. + e^{\beta(t) - \frac{\bar{\mathcal{S}}(t)}{2}} (\rho_{23}st^* + \rho_{23}^*s^*t + \rho_{14}ru^* + \rho_{14}^*r^*u) \right], \end{aligned} \quad (6.30)$$

onde $\bar{\mathcal{S}}(t)$ é definida similarmente a $\mathcal{S}(t)$ em (6.26), mas com $\exp(\hbar\omega/kT)$ substituída pela sua inversa, $\exp(-\hbar\omega/kT)$.

A partir da equação (6.30) concluímos que emaranhamento SR está presente sempre que a seguinte condição é satisfeita:

$$\mathcal{E}(T, t) = \mathcal{S}(T, t) - \bar{\mathcal{S}}(T, t) > \ln \left[-\frac{\rho_{11}|r|^2 + \rho_{22}|s|^2 + \rho_{33}|t|^2 + \rho_{44}|u|^2}{\rho_{23}st^* + \rho_{23}^*s^*t + \rho_{14}ru^* + \rho_{14}^*r^*u} \right]. \quad (6.31)$$

A quantidade relevante no lado esquerdo da equação (6.31) pode ser escrita em termos da densidade espectral como

$$\mathcal{E}(T, t) = 8 \int_0^t ds \int_0^s d\tau \int_0^\infty d\omega J(\omega) \sinh(\hbar\omega/k_B T) \cos[\omega(s - \tau)]. \quad (6.32)$$

Assim, com a equação (6.31) encontramos um critério que nos permite detectar emaranhamento SR em função do tempo e da temperatura do banho.

Na próxima seção, iremos mostrar alguns resultados numéricos para regiões de separabilidade e emaranhamento SR em um diagrama temperatura-tempo (T, t) , definido pelas condições (6.26) para separabilidade e (6.31) para emaranhamento. Devemos acrescentar que estas duas condições não preenchem todo o plano (T, t) . Existem combinações (T, t) para as quais não podemos fazer nenhuma afirmação se o estado total é emaranhado ou separável. Isto se dá pelo fato de que nossos critérios são condições necessárias, mas não suficientes. Para emaranhamento por um lado, mesmo se nosso estado teste (6.29) fosse ótimo, talvez existam estados emaranhados com transposta parcial positiva – conhecidos como *estados emaranhados ligados* (*bound entangled states*) [132]. Para separabilidade, por outro lado, podem existir estados separáveis com uma representação parcial P negativa.

6.4 Resultados numéricos para estados de Werner

Nesta seção apresentamos e discutimos resultados sobre separabilidade e emaranhamento do estado SR total. Escolhendo uma densidade espectral Ôhmica com uma frequência de corte ω_c , com $J(\omega) = \kappa\omega\Theta(\omega - \omega_c)$, onde κ é a constante de acoplamento entre sistema e ambiente, podemos construir diagramas de separabilidade e emaranhamento para diferentes estados iniciais e constantes de acoplamento (variando κ).

Além disso, queremos comparar o tempo para o decaimento do emaranhamento inicial e o tempo para a construção de emaranhamento SR com o tempo de descoerência típico do sistema aberto de dois qubits. O último tempo, τ_{desc} , definimos através da relação $\int_0^{\tau_{desc}} \gamma_{def} ds = 1$, a qual define a escala de tempo de decaimento dos elementos de fora da diagonal do operador reduzido na equação (6.18).

Como estados iniciais X de dois qubits escolhemos os estados de Werner ρ_w , onde $c_i = -w$ em $\rho_{\vec{c}}$ (2.55). Este estado é emaranhado se $w > 1/3$.

Para esse estado específico a condição para separabilidade, a partir da equação (6.26), é dada por

$$\mathcal{S}(T, t) \leq \ln \left[\frac{1+w}{2w} \right], \quad (6.33)$$

e para emaranhamento, a partir da equação (6.31), temos

$$\mathcal{E}(T, t) > \ln \left[\frac{1+w}{2w} \right]. \quad (6.34)$$

O estado puro que tem a menor superposição com a transposta do estado inicial do sistema de dois qubits é o estado com

$$(r, s, t, u) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right). \quad (6.35)$$

Na sequência discutimos primeiramente interação SR fraca ($\kappa = 10^{-3}$), seguido pelo acoplamento forte ($\kappa = 1$). Em ambos os casos escolhemos três estados iniciais de dois qubits: $w = 0, 2$ (nenhum emaranhamento no sistema de dois qubits inicial, pureza baixa), $w = 0, 5$ (algum emaranhamento inicial, pureza média), e $w = 0, 9$ (muito emaranhamento

inicial, quase puro). Em todos os exemplos vemos uma fase inicial onde o estado total permanece separável. Para temperaturas muito baixas esta fase é dificilmente visível e emaranhamento SR surge rapidamente. Exibimos também a perda de emaranhamento e coerência inicial dos dois qubits que é observada em todos os casos. Resultados numéricos são apresentados em diagramas temperatura-tempo (T, t) seguindo a notação: cor vermelha (cinza escuro) quando a condição de emaranhamento (6.34) é satisfeita e cor azul (cinza claro) quando a condição de separabilidade (6.33) é satisfeita.

6.4.1 Acoplamento fraco ($\kappa = 10^{-3}$)

Começamos com um estado de Werner inicial com parâmetro $w = 0,2$. Para esse estado, não existe nenhum emaranhamento entre os dois qubits, mas podemos observar na figura 6.2 que para baixas temperaturas, devido à interação SR, emaranhamento entre o sistema de dois qubits e o ambiente emerge [região vermelha (cinza escuro)]. Pode-se notar que existe uma fronteira claramente visível a uma *temperatura crítica* $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,13\hbar\omega_c$, acima da qual o estado SR total continua separável para todos os tempos apresentados na figura [região azul (cinza claro)].

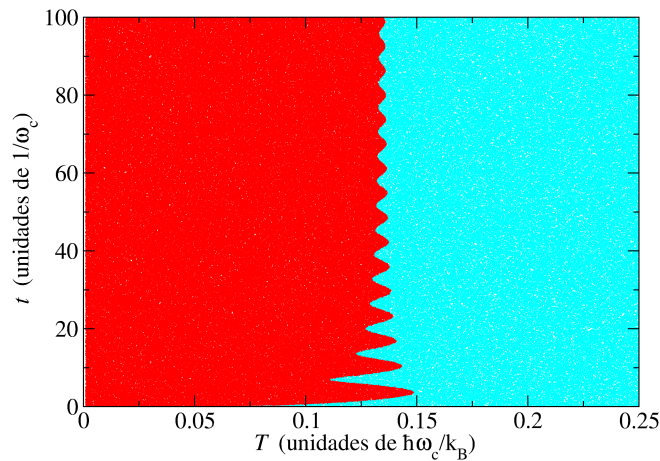


Figura 6.2: Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. Os parâmetros são: $\kappa = 10^{-3}$ (acoplamento fraco) e $w = 0,2$ (nenhum emaranhamento inicial entre os qubits). Notavelmente, para $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,13\hbar\omega_c$, o estado total oscila em função do tempo entre as regiões separável e emaranhada.

Curiosamente, na vizinhança da temperatura crítica, vemos oscilações em função do

tempo entre as regiões separável e emaranhada. Para entender melhor o aparecimento da temperatura crítica e as oscilações, note que para nossa escolha de densidade espectral podemos realizar as integrais na equação (6.32). Desta maneira obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(T, t) &= 8\kappa \text{Shi} \left[\frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \right] - 4\kappa i \left\{ \text{Si} \left[\omega_c \left(t - \frac{i\hbar}{k_B T} \right) \right] - \text{Si} \left[\omega_c \left(t + \frac{i\hbar}{k_B T} \right) \right] \right\} \\ &\approx 8\kappa \text{Shi} \left[\frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \right] - \frac{2\kappa(\omega_c t)}{(\omega_c t)^2 + \left(\frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \right)^2} e^{\frac{\hbar\omega_c}{k_B T}} \text{sen}(\omega_c t), \quad (t \rightarrow \infty).\end{aligned}\quad (6.36)$$

Aqui, $\text{Si}[x]$ é a função seno integral e $\text{Shi}[x]$ é a função seno hiperbólico integral. O primeiro termo no lado direito da equação é independente do tempo, e nos permite determinar a temperatura crítica. Os outros termos são dependentes do tempo e são responsáveis pelas oscilações observadas na figura 6.2. Estas oscilações tendem a zero com $1/t$, como pode ser visto pelo tempo longo apresentado na equação (6.36).

Olhando para o critério de emaranhamento para estados de Werner (6.34), a temperatura crítica é determinada a partir de

$$8\kappa \text{Shi} \left[\frac{\hbar\omega_c}{k_B T_{\text{crit}}} \right] = \ln \left[\frac{1+c}{2c} \right], \quad (6.37)$$

o que nos dá um valor numérico de $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,1345\hbar\omega_c$ (veja figura 6.2). Esta expressão mostra a dependência que a temperatura crítica possui do estado inicial do sistema de dois qubits.

Na figura 6.3 analisamos o caso no qual os dois qubits estão inicialmente emaranhados [$w = 0,5$ na figura 6.3 (a) e $w = 0,9$ na figura 6.3 (b)]. Novamente, vemos emaranhamento SR emergindo para temperaturas muito baixas, e observamos um estado total separável para temperaturas mais altas e todos os tempos apresentados nas figuras. A linha sólida indica, para uma dada temperatura, o tempo de completa perda de emaranhamento entre os dois qubits (morte súbita) e a linha tracejada a escala de tempo de descoerência do estado de dois qubits. As temperaturas críticas para emaranhamento SR são (a) $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,16\hbar\omega_c$ e (b) $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,29\hbar\omega_c$, o que significa que o estado total SR permanece separável (apesar de pequenas oscilações) para todos os tempos apresentados e $T > T_{\text{crit}}$.

Nossos resultados mostram que a perda de emaranhamento entre os dois qubits não tem nenhuma relação direta com o surgimento de emaranhamento SR. A menos que a

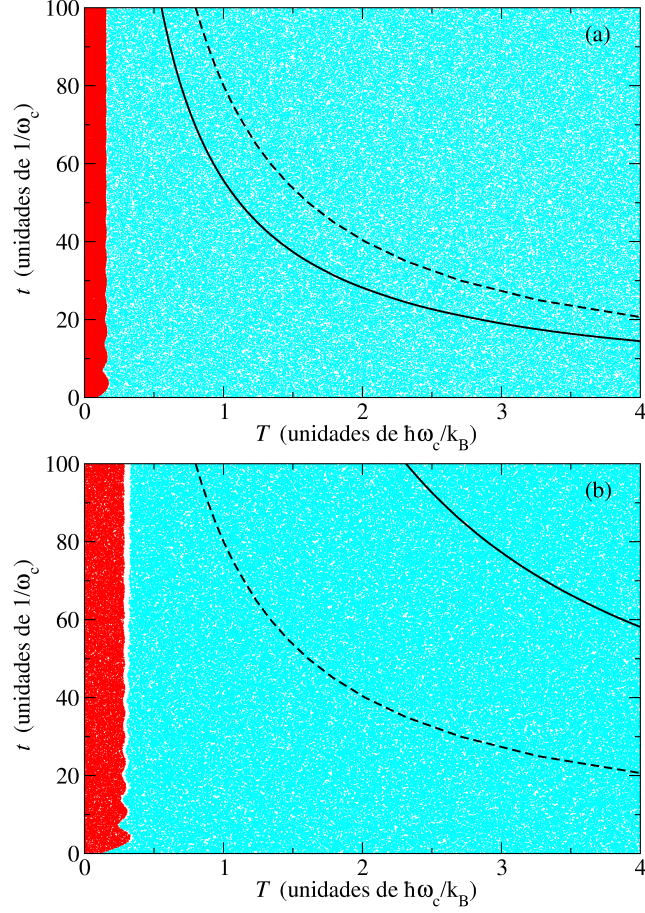


Figura 6.3: Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência e a linha sólida a morte súbita de emaranhamento entre os dois qubits. Enquanto abaixo da linha sólida o sistema de dois qubits ainda tem algum emaranhamento, acima desta linha o emaranhamento desaparece. Os parâmetros são: $\kappa = 10^{-3}$ (acoplamento fraco) e (a) $w = 0,5$ e (b) $w = 0,9$. $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,16\hbar\omega_c$ em (a) e para $k_B T_{\text{crit}} \approx 0,29\hbar\omega_c$ em (b). O estado total oscila em função do tempo entre as regiões separável e emaranhada.

temperatura seja extremamente baixa, vemos que o decaimento do emaranhamento (e descoerência) no sistema acontece enquanto a bipartição SR ainda é um estado separável. Enquanto que para o estado muito emaranhado e quase puro ($w = 0,9$) a escala de tempo de descoerência é mais curta que o tempo para a morte súbita, sendo que esta situação se inverte para um estado inicial menos emaranhado ($w = 0,5$). Dessa forma, o tempo de morte súbita da concorrência e o tempo de descoerência não possuem uma cronologia definida, dependendo então, da escolha do estado inicial. Esse comportamento é explicado pelo fato de estarmos acoplando somente um dos qubits ao reservatório.

6.4.2 Acoplamento forte ($\kappa = 1$)

Aqui escolhemos os mesmos estados de Werner iniciais do caso anterior. A diferença mais significativa ao caso de acoplamento fraco é que nossos critérios para separabilidade e emaranhamento não cobrem todo o diagrama temperatura-tempo. Observamos o aparecimento de uma região branca (desconhecida), onde as condições de separabilidade e emaranhamento não são suficientes para decidir se o sistema está emaranhado com o ambiente ou se o estado total ainda é separável.

Para o estado de Werner inicial com parâmetro $w = 0,2$ (nenhum emaranhamento entre os qubits), podemos ver na figura 6.4 que nosso critério para emaranhamento e separabilidade tem a mesma linha de fronteira para tempos curtos ($\omega_c t \lesssim 0,5$). Para tempos $\omega_c t \gtrsim 0,5$ uma lacuna entre separabilidade e emaranhamento aparece, como mencionado acima. Mesmo sem qualquer emaranhamento entre os qubits, devido à interação SR e as coerências do qubit acoplado, emaranhamento entre o sistema de dois qubits e o ambiente emerge.

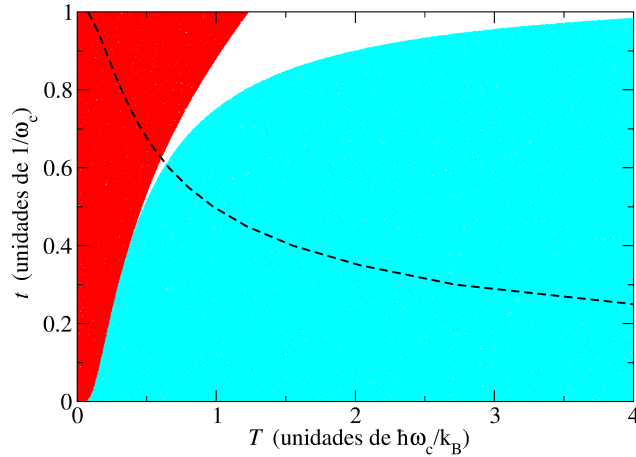


Figura 6.4: Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. Os parâmetros são: $\kappa = 1$ (acoplamento forte) e $w = 0,2$ (nenhum emaranhamento inicial entre os dois qubits). A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência do estado de dois qubits.

Num cenário mais interessante, na figura 6.5 mostramos estados de Werner iniciais com parâmetros (a) $w = 0,5$ e (b) $w = 0,9$. Nestes casos temos emaranhamento inicial entre os qubits, até a morte súbita de emaranhamento (linha sólida). Como no caso do acoplamento fraco, olhando para as figuras fica claro que o surgimento de emaranhamento

SR não tem nenhuma relação com a morte súbita de emaranhamento nos estados de dois qubits.

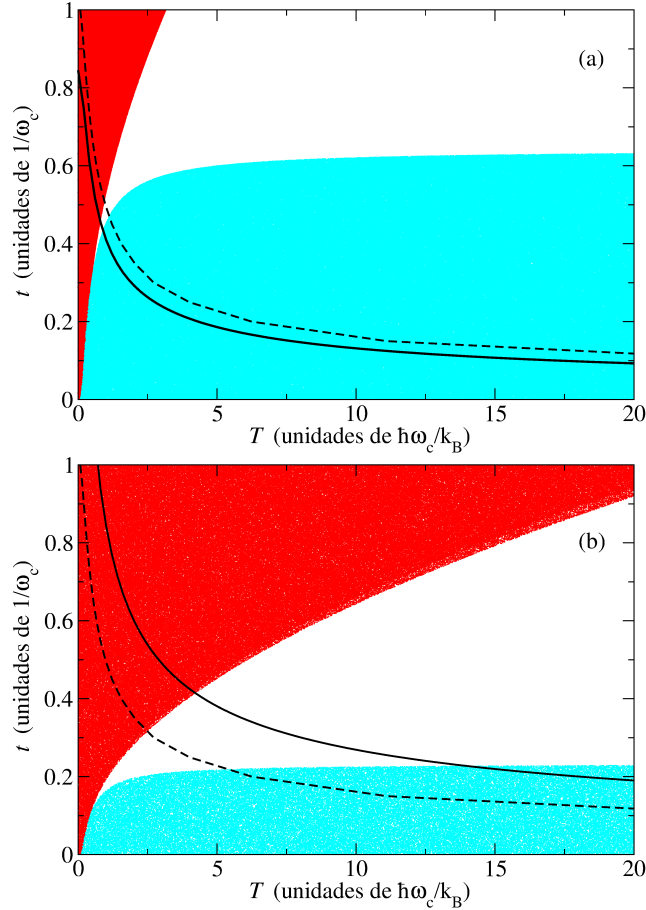


Figura 6.5: Diagrama temperatura-tempo. Região vermelha (cinza escuro): estado SR emaranhado, região azul (cinza claro): estado SR separável. A linha tracejada indica a escala de tempo de descoerência e a linha sólida a morte súbita de emaranhamento entre os dois qubits. Enquanto abaixo da linha sólida o sistema de dois qubits tem algum emaranhamento, acima dela todo emaranhamento desaparece. Os parâmetros são: $\kappa = 1$ (acoplamento forte), (a) $w = 0,5$ e (b) $w = 0,9$.

Para baixas temperaturas, por exemplo, ainda há emaranhamento entre os qubits, enquanto o estado SR é primeiro separável e então emaranhado. Para temperaturas maiores podemos ver morte súbita de emaranhamento, enquanto o estado SR é ainda separável, e este se torna emaranhado após algum tempo. Somente para temperaturas muito específicas, a morte súbita do emaranhamento entre os qubits acontece no mesmo instante em que ocorre o surgimento de emaranhamento entre o sistema e o reservatório.

No contexto de acoplamento forte também conseguimos calcular as temperaturas críticas da equação (6.36). Estas temperaturas são $k_B T_{\text{crit}} \approx 7,29\hbar\omega_c$ para $w = 0,2$, $k_B T_{\text{crit}} \approx 19,7\hbar\omega_c$ para $w = 0,5$ e $k_B T_{\text{crit}} \approx 148\hbar\omega_c$ para $w = 0,9$, e ficam fora dos limites de temperatura mostrados nas figuras.

6.4.3 Decaimento da concorrência

Apontamos que as oscilações no tempo entre estado total SR separável e emaranhado, como observado na figura 6.2 para $T \approx T_{\text{crit}}$, são refletidas até certo ponto num decaimento oscilatório da concorrência no estado de dois qubits. Entretanto, deve-se tomar cuidado já que o mesmo tipo de oscilações no decaimento da concorrência são visíveis nas regiões de emaranhamento SR ou nas regiões de separabilidade SR.

Na figura 6.6 um exemplo deste comportamento oscilatório é mostrado. Para um estado de Werner inicial com $w = 0,5$ e acoplamento fraco, vemos este decaimento oscilatório da concorrência (6.19) devido ao acoplamento do qubit A com o ambiente. Para essa análise, escolhemos três diferentes temperaturas de forma que enquanto a curva tracejada corresponde a oscilações entre o estado total separável e emaranhado, as curvas sólida e pontilhada correspondem a estados emaranhado e separável, respectivamente. Este comportamento é mais acentuado para temperaturas pequenas e se torna cada vez mais suave com o aumento da temperatura. Apesar da concorrência entre os dois qubits também apresentar oscilações, não existe uma conexão evidente com o fato do estado total ser separável, emaranhado ou oscilar entre ambos, como mostrado na figura 6.6.

6.5 Outras bipartições

Até agora focamos no emaranhamento SR e suas relações com a perda de emaranhamento no estado do sistema inicial (ρ_{AB}). Outros autores estudaram emaranhamento em bipartições reduzidas [122–124] para um estado inicial do ambiente puro e não encontraram emaranhamento bipartido em nenhum dos estados $\rho_{AR} = \text{tr}_B\{\rho_{ABR}\}$ ou $\rho_{BR} = \text{tr}_A\{\rho_{ABR}\}$. Essas descobertas também valem para o nosso caso, onde um estado inicial térmico para o ambiente é usado.

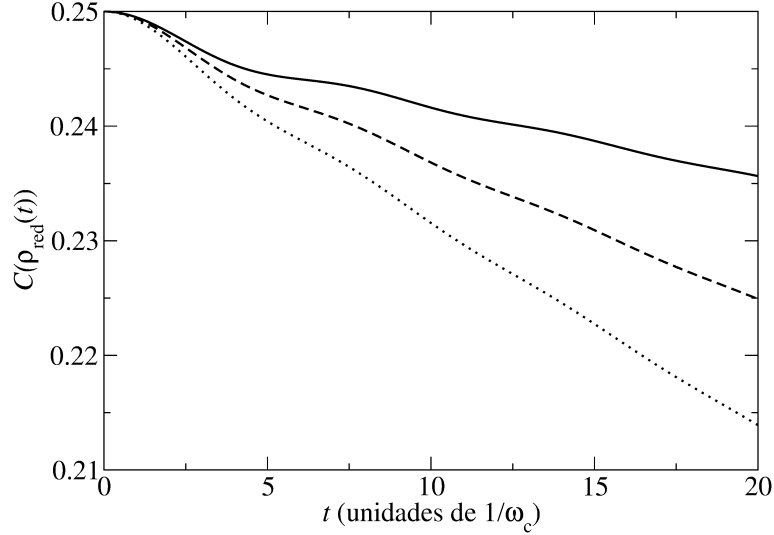


Figura 6.6: Concorrência (6.19) entre os dois qubits para acoplamento fraco ($\kappa = 10^{-3}$), com $w = 0,5$ e $k_B T = 0,1\hbar\omega_c$ (linha sólida), $k_B T = 0,2\hbar\omega_c$ (linha tracejada) e $k_B T = 0,3\hbar\omega_c$ (linha pontilhada). Podemos ver oscilações da concorrência, as quais se tornam mais suaves com o aumento da temperatura.

Traçando sobre o qubit expectador B , $\rho_{AR} = \text{tr}_B\{\rho_{ABR}\}$, não existe emaranhamento entre A e o ambiente de A . Isto acontece porque escolhemos estados X cujo estado reduzido A é uma mistura diagonal na base da defasagem e a separabilidade inicial é preservada. Se traçarmos sobre o qubit A , o estado $\rho_{BR} = \text{tr}_A\{\rho_{ABR}\}$ nunca irá desenvolver nenhum emaranhamento entre B e o ambiente de A . De novo isto se deve ao fato que não existe emaranhamento inicial e B é o qubit expectador.

Em [123, 124] os autores investigaram uma medida de emaranhamento conhecida como *tangle* para o estado de três qubits ABR , mostrando emaranhamento de três qubits do tipo GHZ². Temos que salientar, entretanto, que para um estado inicial do ambiente misto, o cenário de três qubits cessa de valer e afirmações sobre emaranhamento multipartido são difíceis de serem obtidas. Mesmo assim, vemos na figura 6.5 que para tempos longos o suficiente existe emaranhamento entre os dois qubits e o ambiente, enquanto todos os três estados bipartidos $\rho_{AB}, \rho_{AR}, \rho_{BR}$, são separáveis, apontando emaranhamento tripartido genuíno.

²Estados Greenberger–Horne–Zeilinger (GHZ) [133] são estados que envolvem pelo menos três subsistemas (partículas). Esses estados são superposições quânticas de todos os subsistemas estando no estado 0 com todos eles estando no estado 1 (estados 0 e 1 de um único subsistema são completamente distinguíveis). O estado mais simples dessa classe é o estado GHZ de três qubits: $|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}$.

Em [122], os autores acoplaram um sistema de dois qubits (estado X inicialmente emaranhado) a dois ambientes independentes ($\rho_{ABR_AR_B}$), os quais são assumidos serem qubits. Olhando para a dinâmica de correlações para diferentes bipartições, eles mostraram que não existe nenhuma relação entre o surgimento de correlação SR e o decaimento de emaranhamento no sistema principal. Entretanto, eles não estudaram a partição $AB - R$, onde encontramos o aparecimento de correlações (quânticas) SR.

Na nossa investigação e nos outros trabalhos discutidos acima [122–124], a mensagem principal é que aparentemente não existe uma relação simples entre a perda de emaranhamento no sistema e o surgimento de emaranhamento com o ambiente. Não conseguimos identificar uma *transferência* de emaranhamento do sistema para a partição SR.

Pode a perda de emaranhamento do sistema ser encontrada no ambiente? A resposta é não, como pode ser facilmente verificado no nosso modelo. Realizando a operação do traço sobre o sistema de qubits encontramos a representação P do estado do ambiente

$$\rho_R = \text{Tr}_S[\rho_T(t)] = \int \frac{d^2z}{\pi} \frac{1}{\bar{n}} e^{-|z|^2/\bar{n}} \hat{P}_R(t; z, z^*) |z\rangle\langle z|,$$

com a função positiva

$$\hat{P}_R(t; z, z^*) = [\mathcal{A}_+(\rho_{11} + \rho_{22}) + \mathcal{A}_-(\rho_{33} + \rho_{44})] > 0.$$

Da positividade de $\hat{P}_R(t; z, z^*)$ podemos concluir que qualquer estado reduzido multimodal é uma mistura clássica de estados coerentes e logo, separável. Em particular, qualquer estado bipartido de dois modos λ_1, λ_2 selecionado do ambiente, é separável. Para concluir, não existe o aparecimento de emaranhamento entre os modos do ambiente, indicando que de fato o emaranhamento entre os qubits pode desaparecer completamente, sem que apareça em qualquer outra partição.

O entendimento de correlações SR é fundamental para a preservação de informação quântica. Neste capítulo investigamos a dinâmica de correlações quânticas (emaranhamento) e estudamos como elas são redistribuídas (ou não) entre partições distintas. Qualquer investigação de correlação SR começa com a escolha do modelo total. Portanto, primeiro discutimos o problema da dilação de um qubit sob um canal de defasagem, evidenciando modelos fisicamente diferentes que levam às mesmas dinâmicas descoerentes no

nível reduzido.

Utilizamos um ambiente realista, com temperatura finita e infinitos graus de liberdade. Investigamos a dinâmica de emaranhamento de um sistema de dois qubits acoplado a um banho de osciladores harmônicos. Usando uma representação parcial P analisamos o estado total exato de um modelo descoerente apropriado. Obtivemos condições que nos permitem, para uma grande gama de parâmetros, detectar se o estado de dois qubits com o ambiente é separável ou emaranhado. Diferentes constantes de acoplamento e estados iniciais de dois qubits foram considerados.

O sistema total apresenta um comportamento interessante quando olhamos para a relação de emaranhamento entre as partes. Emaranhamento entre o sistema de dois qubits AB e o reservatório R irá aparecer para temperaturas baixas o suficiente. Para temperaturas acima de uma temperatura crítica, o estado total permanece separável. Para a maioria das temperaturas, e durante tempos relevantes para descoerência e perda de emaranhamento no estado de dois qubits, o estado total permanece separável. Adicionalmente, mostramos que os modos do ambiente nunca se emaranham entre si. Assim, para muitos parâmetros, o emaranhamento inicial entre os qubits desaparece sem o surgimento de emaranhamento em qualquer outra bipartição. Para temperaturas muito baixas detectamos condições onde o estado total oscila entre domínios separável e emaranhado em função do tempo. Curiosamente, estas oscilações também podem ser vistas na evolução temporal do emaranhamento entre os qubits.

A investigação de separabilidade e emaranhamento SR para o estado total é altamente não-trivial, de forma que nos baseamos numa representação parcial P para obter resultados sobre essas correlações. Para detecção de emaranhamento, por exemplo, tivemos que adivinhar um bom estado teste. Esta abordagem leva a regiões “brancas” no diagrama (T, t) , onde não podemos fazer qualquer afirmação se o estado total é emaranhado ou separável. Além disso, nossa abordagem nos permite detectar emaranhamento SR, mas não quantificá-lo. Consequentemente, não olhamos para relações de monogamia no sistema tripartido ABR . A busca por uma maneira de estimar a quantidade de emaranhamento e verificar estas relações ainda é um problema em aberto.

Pode-se considerar também o cenário no qual pode haver o surgimento de correlações clássicas e quânticas, sendo necessário uma investigação mais aprofundada baseada na

informação mútua e na discórdia quântica. Utilizando o modelo proposto neste capítulo, e a partir dos resultados apresentados no capítulo 5, seria interessante analisar o fluxo de informação mútua e surgimento de correlações tripartidas genuínas.

Os resultados deste capítulo foram publicados em [134].

Conclusão

O estudo sobre correlações quânticas e fenômeno de descoerência é de fundamental importância para o desenvolvimento das áreas de informação quântica e computação quântica, além de contribuir com o campo de fundamentos da teoria quântica. Muitos avanços aconteceram na área de teoria de informação nos últimos anos, com a utilização de recursos quânticos para a transmissão e processamento de informação. Do ponto de vista da descoerência, entender melhor como esse fenômeno ocorre ajuda na correção de erros envolvendo perda de emaranhamento no sistema e no desenvolvimento de canais de transmissão mais eficientes levando em consideração a ação do ambiente. Dentro desse contexto, nosso trabalho auxilia, de um ponto de vista mais fundamental, a entender melhor a física das correlações e sua interação com o ambiente.

Dentre as questões que foram levantadas, pode-se evidenciar duas: (i) a relação existente entre as principais correlações quânticas existentes na literatura, ou ainda, qual, se existe alguma, relação de hierarquia que elas devem respeitar; e (ii) se existe fluxo de correlações entre sistemas tripartidos, quando um deles desempenha o papel do ambiente. São essas as questões principais que permearam nosso estudo no decorrer desta tese.

No que diz respeito à relação entre diferentes quantificadores de correlações quânticas, analisamos medidas bem conhecidas: discórdia quântica generalizada, emaranhamento e não-localidade. Além disso, adicionamos a esse quadro o direcionamento EPR. Porém, para que pudéssemos analisar essa medida era preciso encontrar uma fórmula fechada para sistemas de dois qubits, nos quais baseamos nosso estudo. Portanto, abordamos no capí-

tulo 3 a quantificação dessa medida baseados em desigualdades estabelecidas na literatura nos cenários de duas e três medições por sítio. Os quantificadores que encontramos são importantes dado que eles valem para qualquer sistema de dois qubits e podem ser utilizados no desenvolvimento de protocolos de informação e computação quântica que envolvam direcionamento EPR. Além disso, mostramos que o direcionamento EPR baseado em duas medições por sítio é precisamente igual ao quantificador da desigualdade de Bell-CHSH, constituindo uma medida de não-localidade. Utilizando o direcionamento EPR baseado em três medições, encontramos uma relação de hierarquia envolvendo emaranhamento e não-localidade, reproduzindo resultados previamente reportados.

Em seguida, no capítulo 4, aprofundamos nossa análise da hierarquia apresentada pelas correlações quânticas usando *diagramas de recursos*, nos quais comparamos discórdia quântica, emaranhamento, direcionamento EPR e não-localidade de Bell. A partir de resultados analíticos e ferramentas estatísticas convenientes, mostramos que existe uma hierarquia bem definida para estados X com marginais maximamente misturadas. Ou seja, estados que são Bell não-locais também são EPR direcionáveis, estados EPR direcionáveis também são emaranhados e estados emaranhados também apresentam discórdia não-nula, enquanto a relação inversa não é verdadeira. Além disso, mostramos que as discórdias- q são todas equivalentes. Para complementar essa análise, mostramos uma cronologia de mortes e ressurgimentos súbitos para os recursos em questão, correspondendo à robustez de cada correlação sob canais de ruído.

Sobre a questão envolvendo fluxo de correlação, primeiramente fizemos uma análise para a informação quântica no contexto de uma dinâmica de defasagem induzida por um ambiente composto por banhos finitos. A partir de relações de monogamia da informação mútua, mostramos sua conexão com correlações tripartidas. A partir dessas verificações, propusemos um estudo de caso no qual dois qubits interagem com banhos finitos e verificamos a existência de uma relação de conservação envolvendo a quantidade de correlações tripartidas e a quantidade de correlações quânticas no sistema de dois qubits. Além disso, propusemos uma medida de não-Markovianidade para esse modelo específico que depende do número de modos do banho térmico, da temperatura de equilíbrio, assim como, da distribuição espectral do acoplamento.

Para fechar nossa investigação acerca de fluxo de correlações, usamos um modelo apropriado (dado pela representação parcial P), no qual é possível escrever o operador

densidade total de um sistema composto por dois qubits e um ambiente acoplado a um dos qubits. A partir desse operador densidade total conseguimos propor condições que nos permitem detectar se o estado total composto pelo sistema de dois qubits acoplado ao ambiente é separável ou emaranhado para diferentes tempos, temperaturas e constantes de acoplamento. A partir dessas condições pudemos afirmar que no modelo proposto não existe nenhuma relação entre a perda de emaranhamento entre os qubits e o surgimento de emaranhamento entre o sistema de dois qubits e o ambiente, ou seja, não existe *fluxo de emaranhamento* entre as partições do sistema. Complementarmente, mostramos que este emaranhamento também não é transferido para os modos do banho. Assim, de acordo com o nosso modelo, assim como outros trabalhos recentes, uma relação de conservação de emaranhamento pode não existir quando se trata de ambientes realísticos.

Assim, nesta tese apresentamos contribuições relevantes para as áreas de informação quântica e computação quântica. Nós nos dedicamos ao estudo de correlações quânticas e o fluxo de correlações em diferentes abordagens e nossos resultados levam a um melhor entendimento a respeito da natureza das correlações e interações de sistemas quânticos com o ambiente, podendo ser utilizados no desenvolvimento de protocolos de informação quântica, assim como contribuem para área de fundamentos da mecânica quântica.

Referências Bibliográficas

- [1] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. The Bell System Technical Journal **27**, 379–423 (1948).
- [2] L. Szilard. Über die entropieverminderung in einem thermodynamischen system bei eingriffen intelligenter wesen. Zeitschrift für Physik **53**, 11-12, 840–856 (1929).
- [3] R. Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. IBM Journal of Research and Development **5**, 3, 183–191 (1961).
- [4] C. H. Bennett. Logical reversibility of computation. IBM Journal of Research and Development **17**, 6, 525–532 (1973).
- [5] M. B. Plenio. The holevo bound and landauer’s principle. Physics Letters A **263**, 4, 281–284 (1999).
- [6] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Physical Review **47**, 10, 777–780 (1935).
- [7] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **31**, 4, 555–563 (1935).
- [8] E. Schrödinger. Probability relations between separated systems. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **32**, 3, 446–452 (1936).
- [9] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. Physics **1**, 3, 195–200 (1964).

-
- [10] R. F. Werner. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A* **40**, 8, 4277 (1989).
 - [11] S. Popescu. Bell's inequalities versus teleportation. What is nonlocality? *Physical Review Letters* **72**, 6, 797 (1994).
 - [12] L. Henderson e V. Vedral. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **34**, 35, 6899 (2001).
 - [13] H. Ollivier e W. H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters* **88**, 1, 017901 (2001).
 - [14] H. M. Wiseman, S. J. Jones e A. C. Doherty. Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. *Physical Review Letters* **98**, 14, 140402 (2007).
 - [15] S. J. Jones, H. M. Wiseman e A. C. Doherty. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. *Physical Review A* **76**, 5, 052116 (2007).
 - [16] E. G. Cavalcanti, S. J. Jones, H. M. Wiseman e M. D. Reid. Experimental criteria for steering and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physical Review A* **80**, 3, 032112 (2009).
 - [17] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters* **70**, 13, 1895 (1993).
 - [18] S. Takeda, T. Mizuta, M. Fuwa, P. van Loock e A. Furusawa. Deterministic quantum teleportation of photonic quantum bits by a hybrid technique. *Nature* **500**, 7462, 315–318 (2013).
 - [19] L. Steffen, Y. Salathe, M. Oppliger, P. Kurpiers, M. Baur, C. Lang, C. Eichler, G. Puebla-Hellmann, A. Fedorov e A. Wallraff. Deterministic quantum teleportation with feed-forward in a solid state system. *Nature* **500**, 7462, 319–322 (2013).
 - [20] B. Dakić, Y. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner e P. Walther. Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nature Physics* **8**, 9, 666–670 (2012).

- [21] M. Gu, H. M. Chrzanowski, S. M. Assad, T. Symul, K. Modi, T. C. Ralph, V. Vedral e P. K. Lam. Observing the operational significance of discord consumption. *Nature Physics* **8**, 9, 671–675 (2012).
- [22] A. Brodutch. Discord and quantum computational resources. *Physical Review A* **88**, 2, 022307 (2013).
- [23] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini e C. J. V. Boas. Robustness of quantum discord to sudden death. *Physical Review A* **80**, 2, 024103 (2009).
- [24] Z. Merali. Quantum computing: The power of discord. *Nature* **474**, 24–26 (2011).
- [25] Y. Z. Law, L. P. Thinh, J.-D. Bancal e V. Scarani. Quantum randomness extraction for various levels of characterization of the devices. *Journal Physics A* **47**, 42, 424028 (2014).
- [26] A. Acín, N. Brunner, N. Gisin, S. Massar, S. Pironio e V. Scarani. Device-Independent Security of Quantum Cryptography against Collective Attacks. *Physical Review Letters* **98**, 23, 230501 (2007).
- [27] A. Acín, N. Gisin e L. Masanes. From Bell’s Theorem to Secure Quantum Key Distribution. *Physical Review Letters* **97**, 12, 120405 (2006).
- [28] J. Barrett, L. Hardy e A. Kent. No Signaling and Quantum Key Distribution. *Physical Review Letters* **95**, 1, 010503 (2005).
- [29] A. O. Caldeira e A. J. Leggett. Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model. *Physical Review A* **31**, 2, 1059 (1985).
- [30] W. H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today* **44**, 36 (1991).
- [31] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [32] A. Pernice e W. T. Strunz. Decoherence and the nature of system-environment correlations. *Physical Review A* **84**, 6, 062121 (2011).

-
- [33] A. Pernice, J. Helm e W. T. Strunz. System-environment correlations and non-Markovian dynamics. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* **45**, 15, 154005 (2012).
- [34] W. H. Zurek. Decoherence, einselection and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics* **75**, 3, 715 (2003).
- [35] R. M. Angelo e A. D. Ribeiro. Wave-particle duality: an information-based approach. *Foundations of Physics* **45**, 11, 1407–1420 (2015).
- [36] A. L. Bilobran e R. M. Angelo. A measure of physical reality. *Europhysics Letters* **112**, 4, 40005 (2015).
- [37] C. H. Bennett e D. P. DiVincenzo. Quantum information and computation. *Nature* **404**, 6775, 247–255 (2000).
- [38] A. Galindo e M. A. Martín-Delgado. Information and computation: Classical and quantum aspects. *Review of Modern Physics* **74**, 2, 347 (2002).
- [39] H. Buhrman, R. Cleve, S. Massar e R. de Wolf. Nonlocality and communication complexity. *Review of Modern Physics* **82**, 1, 665 (2010).
- [40] L. C. Céleri, J. Maziero e R. M. Serra. Theoretical and Experimental Aspects of Quantum Discord and Related Measures. *International Journal of Quantum Information* **9**, 7-8, 1837–1873 (2011).
- [41] S. J. Freedman e J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **28**, 14, 938 (1972).
- [42] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers. *Physical Review Letters* **49**, 25, 1804 (1982).
- [43] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani e S. Wehner. Bell nonlocality. *Review of Modern Physics* **86**, 2, 419 (2014).
- [44] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters* **23**, 15, 880 (1969).

- [45] D. Collins e N. Gisin. A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality. *Journal of Physics A: General Physics* **37**, 5, 1775 (2004).
- [46] E. A. Fonseca e F. Parisio. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Physical Review A* **92**, 3, 030101(R) (2015).
- [47] B. S. Cirel'son. Quantum Generalizations of Bell's Inequality. *Letters in Mathematical Physics* **4**, 2, 93–100 (1980).
- [48] S. Pironio, A. Acín, S. Massar, A. B. de la Giroday, D. N. Matsukevich, P. Maunz, S. Olmschenk, D. Hayes, L. Luo, T. A. Manning e C. Monroe. Random numbers certified by Bell's theorem. *Nature* **464**, 1792, 1021–1024 (2010).
- [49] C. Brukner, M. Zukowski, J. W. Pan e A. Zeilinger. Bell's Inequalities and Quantum Communication Complexity. *Physical Review Letters* **92**, 12, 127901 (2004).
- [50] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenberg, R. F. L. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T. H. Taminiau e R. Hanson. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature* **526**, 7575, 682–686 (2015).
- [51] M. Giustina, M. A. Versteegh, S. Wengerowsky, J. Handsteiner, A. Hochrainer, K. Phelan, F. Steinlechner, J. Kofler, J. Larsson, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, J. Beyer, T. Gerrits, A. E. Lita, L. K. Shalm, S. W. Nam, T. Scheidl, R. Ursin, B. Wittmann e A. Zeilinger. Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons. *Physical Review Letters* **115**, 25, 250401 (2015).
- [52] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu e B. Shumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A* **53**, 4, 2046 (1996).
- [53] D. Bruss. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics* **43**, 9, 4237–4251 (2002).
- [54] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Thomas e W. K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A* **54**, 5, 3824 (1996).

-
- [55] W. K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters* **80**, 10, 2245 (1998).
- [56] G. Vidal e R. F. Werner. Computable measure of entanglement. *Physical Review A* **65**, 3, 032314 (2002).
- [57] S. Hill e W. K. Wootters. Entanglement of a Pair of Quantum Bits. *Physical Review Letters* **78**, 26, 5022 (1997).
- [58] A. Peres. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters* **77**, 8, 1413 (1996).
- [59] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A* **223**, 1-2, 1–8 (1996).
- [60] C. H. Bennett e S. J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Physical Review Letters* **69**, 20, 2881 (1992).
- [61] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki e K. Horodecki. Quantum Entanglement. *Reviews of Modern Physics* **81**, 2, 865 (2009).
- [62] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek e V. Vedral. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Review of Modern Physics* **84**, 4, 1655 (2012).
- [63] B. Dakić, C. Brukner e V. Vedral. Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord. *Physical Review Letters* **105**, 19, 190502 (2010).
- [64] A. C. S. Costa. *Correlações Quânticas em Sistemas de Dois Qbits: Medidas Alternativas e Dinâmica sob Acoplamento com Banho Térmico*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná (2012).
- [65] A. C. S. Costa e R. M. Angelo. Bayes' rule, generalized discord, and nonextensive thermodynamics. *Physical Review A* **87**, 3, 032109 (2013).
- [66] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics* **52**, 1-2, 479–487 (1988).

- [67] G. A. Raggio. Properties of q-entropies. *Journal of Mathematical Physics* **36**, 9, 4785–4791 (1995).
- [68] A. Datta, A. Shaji e C. M. Caves. Quantum Discord and the Power of One Qubit. *Physical Review Letters* **100**, 5, 050502 (2008).
- [69] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida e A. G. White. Experimental Quantum Computing without Entanglement. *Physical Review Letters* **101**, 20, 200501 (2008).
- [70] U. Fano. Pairs of two-level systems. *Reviews of Modern Physics* **55**, 4, 855 (1983).
- [71] S. Luo. Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A* **77**, 4, 042303 (2008).
- [72] T. Yu e J. H. Eberly. Evolution from entanglement to decoherence of bipartite mixed “X”states. *Quantum Information and Computation* **7**, 459–468 (2007).
- [73] M. D. Reid. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Physical Review A* **40**, 2, 913 (1989).
- [74] S. P. Walborn, A. Salles, R. M. Gomes, F. Toscano e P. H. S. Ribeiro. Revealing Hidden Einstein-Podolsky-Rosen Nonlocality. *Physical Review Letters* **106**, 13, 130402 (2011).
- [75] J. Schneeloch, C. J. Broadbent, S. P. Walborn, E. G. Cavalcanti e J. C. Howell. Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities from entropic uncertainty relations. *Physical Review A* **87**, 6, 062103 (2013).
- [76] J. Schneeloch, P. B. Dixon, G. A. Howland, C. J. Broadbent e J. C. Howell. Violation of Continuous-Variable Einstein-Podolsky-Rosen Steering with Discrete Measurements. *Physical Review Letters* **110**, 13, 130407 (2013).
- [77] I. Kogias, A. R. Lee, S. Ragy e G. Adesso. Quantification of Gaussian Quantum Steering. *Physical Review Letters* **114**, 6, 060403 (2015).
- [78] E. G. Cavalcanti, C. J. Foster, M. Fuwa e H. M. Wiseman. Analog of the Clauser-Horne-Shimony-Holt inequality for steering. *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics* **32**, 4, A74–A81 (2015).

- [79] A. Roy, S. S. Bhattacharya, A. Mukherjee e M. Banik. Optimal quantum violation of Clauser-Horne-Shimony-Holt like steering inequality. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **48**, 41, 415302 (2015).
- [80] M. Zukowski, A. Dutta e Z. Yin. Geometric Bell-like inequalities for steering. *Physical Review A* **91**, 3, 032107 (2015).
- [81] R. Horodecki, P. Horodecki e M. Horodecki. Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: Necessary and sufficient condition. *Physics Letters A* **200**, 5, 340–344 (1995).
- [82] P. Skrzypczyk, M. Navascués e D. Cavalcanti. Quantifying Einstein-Podolsky-Rosen Steering. *Physical Review Letters* **112**, 18, 180404 (2014).
- [83] M. Piani e J. Watrous. Necessary and Sufficient Quantum Information Characterization of Einstein-Podolsky-Rosen Steering. *Physical Review Letters* **114**, 6, 060404 (2015).
- [84] I. Kogias, P. Skrzypczyk, D. Cavalcanti, A. Acín e G. Adesso. Hierarchy of Steering Criteria Based on Moments for All Bipartite Quantum Systems. *Physical Review Letters* **115**, 21, 210401 (2015).
- [85] J. Schwinger. Unitary operator bases. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **46**, 4, 570–579 (1960).
- [86] M. L. Hu. Relations between entanglement, Bell-inequality violation and teleportation fidelity for the two-qubit X states. *Quant. Inf. Process.* **12**, 1, 229–236 (2013).
- [87] M. Jafarpour e A. Sabour. A useful strong lower bound on two-qubit concurrence. *Quantum Information Processing* **11**, 6, 1389–1402 (2012).
- [88] A. A. Méthot e V. Scarani. An anomaly of non-locality. *Quantum Information and Computation* **7**, 157–170 (2007).
- [89] A. C. S. Costa e R. M. Angelo. Quantification of Einstein-Podolski-Rosen steering for two-qubit states. *Physical Review A* **93**, 2, 020103(R) (2016).
- [90] J. Eisert e M. B. Plenio. A comparison of entanglement measures. *Journal of Modern Optics* **46**, 1, 145–154 (1999).

-
- [91] B. Bellomo, R. L. Franco e G. Compagno. Non-Markovian Effects on the Dynamics of Entanglement. *Physical Review Letters* **99**, 16, 160502 (2007).
- [92] A. C. S. Costa, R. M. Angelo e M. W. Beims. Generalized discord, entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen steering, and Bell nonlocality in two-qubit systems under (non-)Markovian channels: Hierarchy of quantum resources and chronology of deaths and births. *Physica A* **461**, 469–479 (2016).
- [93] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral e M. Williamson. Unified View of Quantum and Classical Correlations. *Physical Review Letters* **104**, 8, 080501 (2010).
- [94] A. Wehrl. General properties of entropy. *Review of Modern Physics* **50**, 2, 221 (1978).
- [95] C. H. Bennett, A. Grudka, M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki. Postulates for measures of genuine multipartite correlations. *Physical Review A* **83**, 1, 012312 (2011).
- [96] J. Maziero e F. M. Zimmer. Genuine multipartite system-environment correlations in decoherent dynamics. *Physical Review A* **86**, 4, 042121 (2012).
- [97] V. Coffman, J. Kundu e W. K. Wootters. Distributed entanglement. *Physical Review A* **61**, 5, 052306 (2000).
- [98] T. R. de Oliveira, M. F. Cornelio e F. F. Fanchini. Monogamy of entanglement of formation. *Physical Review A* **89**, 3, 034303 (2014).
- [99] M. Koashi e A. Winter. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Physical Review A* **69**, 2, 022309 (2004).
- [100] W. J. McGill. Multivariate information transmission. *Psychometrika* **19**, 2, 97–116 (1954).
- [101] R. M. Fano. *Transmission of Information: A Statistical Theory of Communications* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1961).
- [102] K. Krippendorff. Information of interactions in complex systems. *International Journal of General Systems* **38**, 6, 669–680 (2009).

-
- [103] P. Hayden, M. Headrick e A. Maloney. Holographic mutual information is monogamous. *Physical Review D* **87**, 4, 046003 (2013).
- [104] E. H. Lieb e M. B. Ruskai. Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy. *Journal of Mathematical Physics* **14**, 1938 (1973).
- [105] P. Hayden, R. Jozsa, D. Petz e A. Winter. Structure of States Which Satisfy Strong Subadditivity of Quantum Entropy with Equality. *Communications in Mathematical Physics* **246**, 2, 359–374 (2004).
- [106] R. M. Angelo, E. S. Cardoso e K. Furuya. Decoherence induced by a phase-damping reservoir. *Physical Review A* **73**, 6, 062107 (2006).
- [107] Y. Huang. Quantum discord for two-qubit X states: Analytical formula with very small worst-case error. *Physical Review A* **88**, 1, 014302 (2013).
- [108] F. F. Fanchini, G. Karpat, L. K. Castelano e D. Z. Rossatto. Probing the degree of non-Markovianity for independent and common environments. *Physical Review A* **88**, 1, 012105 (2013).
- [109] W. H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Physical Review D* **24**, 6, 1516 (1981).
- [110] M. F. Cornelio, O. J. Farías, F. F. Fanchini, I. Frerot, G. H. Aguilar, M. O. Hor-Meyll, M. C. de Oliveira, S. P. Walborn, A. O. Caldeira e P. H. S. Ribeiro. Emergence of the Pointer Basis through the Dynamics of Correlations. *Physical Review Letters* **109**, 19, 190402 (2012).
- [111] H.-P. Breuer, E.-M. Laine e J. Piilo. Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems. *Physical Review Letters* **103**, 21, 210401 (2009).
- [112] A. Rivas, S. F. Huelga e M. B. Plenio. Entanglement and Non-Markovianity of Quantum Evolutions. *Physical Review Letters* **105**, 5, 050403 (2010).
- [113] S. Luo, S. Fu e H. Song. Quantifying non-Markovianity via correlations. *Physical Review A* **86**, 4, 044101 (2012).

-
- [114] J. Rosa e M. W. Beims. Dissipation and transport dynamics in a ratchet coupled to a discrete bath. *Physical Review E* **78**, 3, 031126 (2008).
- [115] C. Manchein, J. Rosa e M. W. Beims. Chaotic motion at the emergence of the time averaged energy decay. *Physica D* **238**, 16, 1688–1694 (2009).
- [116] X.-J. Ren e H. Fan. Non-monogamy of quantum discord and upper bounds for quantum correlation. *Quantum Information and Computation* **13**, 5-6, 469–478 (2013).
- [117] A. C. S. Costa, R. M. Angelo e M. W. Beims. Monogamy and backflow of mutual information in non-Markovian thermal baths. *Physical Review A* **90**, 1, 012322 (2014).
- [118] J. H. Reina, C. E. Susa e F. F. Fanchini. Extracting Information from Qubit-Environment Correlations. *Scientific Reports* **4**, 7443 (2014).
- [119] L. Diósi e W. T. Strunz. The non-Markovian stochastic Schrödinger equation for open systems. *Physics Letters A* **235**, 6, 569–573 (1997).
- [120] W. T. Strunz. Finite Temperature Dynamics of the Total State in an Open System Model. *Open Systems and Information Dynamics* **12**, 1, 65–80 (2005).
- [121] K. Roszak, L. Marcinowski e P. Machnikowski. Decoherence-enhanced quantum measurement of a quantum-dot spin qubit. *Physical Review A* **91**, 3, 032118 (2015).
- [122] J. Maziero, T. Werlang, F. F. Fanchini, L. C. Céleri e R. M. Serra. System-reservoir dynamics of quantum and classical correlations. *Physical Review A* **81**, 022116 (2010).
- [123] O. J. Farías, G. H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, P. H. S. Ribeiro, L. Davidovich e S. P. Walborn. Observation of the Emergence of Multipartite Entanglement Between a Bipartite System and its Environment. *Physical Review Letters* **109**, 15, 150403 (2012).
- [124] G. H. Aguilar, O. J. Farías, A. Valdés-Hernández, P. H. S. Ribeiro, L. Davidovich e S. P. Walborn. Flow of quantum correlations from a two-qubit system to its environment. *Physical Review A* **89**, 2, 022339 (2014).

-
- [125] R. Feynman e F. L. Vernon. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Annals of Physics* **24**, 118–173 (1963).
- [126] A. O. Caldeira e A. J. Leggett. Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems. *Physical Review Letters* **46**, 4, 211 (1981).
- [127] G. Lindblad. On the Generators of Quantum Dynamical Semigroup. *Communications in Mathematical Physics* **48**, 2, 119–130 (1976).
- [128] T. Konrad, F. de Melo, M. Tiersch, C. Kasztelan, A. Aragao e A. Buchleitner. Evolution equation for quantum entanglement. *Nature Physics* **4**, 2, 99–102 (2008).
- [129] Z. Ficek e R. Tanaś. Dark periods and revivals of entanglement in a two-qubit system. *Physical Review A* **74**, 2, 024304 (2006).
- [130] R. J. Glauber. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Physical Review* **131**, 6, 2766 (1963).
- [131] E. C. G. Sudarshan. Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams. *Physical Review Letters* **10**, 7, 277 (1963).
- [132] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki. Mixed-State Entanglement and Distillation: Is there a “Bound” Entanglement in Nature? *Physical Review Letters* **80**, 24, 5239 (1998).
- [133] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony e A. Zeilinger. Bell’s theorem without inequalities. *American Journal of Physics* **58**, 12, 1131–1143 (1990).
- [134] A. C. S. Costa, M. W. Beims e W. T. Strunz. System-environment correlations for dephasing two-qubit states coupled to thermal baths. *Physical Review A* **93**, 5, 052316 (2016).
- [135] A. Pernice. *The role of system-environment correlations in the dynamics of open quantum systems*. Tese de Doutorado, Technische Universität Dresden (2012).

Matriz densidade de sistemas de dois qubits

Considere um sistema de dois qubits com espaço de Hilbert $\mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{C}^2$ e base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Na representação de Bloch, qualquer estado para este sistema pode ser parametrizado como [70]:

$$\varrho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{y} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbb{1}^{AB}$ é a matriz identidade para o sistema composto, $\mathbb{1}^A$ e $\mathbb{1}^B$ são as matrizes identidade para o subsistemas A e B , respectivamente. $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sendo as matrizes de Pauli nas direções x, y, z . $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $t_{ij} = t_{ji}$ são números reais que denotam os elementos na matriz de correlação T .

Se realizarmos operações unitárias locais podemos reescrever esse sistema numa forma mais simples, de acordo com a referência [71]. Ou seja, de acordo com o teorema da decomposição de valor único em álgebra linear, a matriz $T = \{t_{jk}\}$, real e simétrica, pode sempre ser escrita como $T = O^A \text{diag}\{c_1, c_2, c_3\} O^B$ ou, equivalentemente, como

$$\sum_{i,j=1}^3 O_{im}^A t_{ij} O_{nj}^B = \delta_{mn} c_m, \quad (\text{A.2})$$

onde $O^A = \{O_{im}^A\}$ e $O^B = \{O_{nj}^B\}$ são matrizes ortogonais em $O(3)$. Além disso, sempre existem matrizes unitárias U e V em $U(2)$, tal que $U \sigma_i U^\dagger = \sum_{m=1}^3 O_{im}^A \sigma_m$ e $V \sigma_j V^\dagger =$

$\sum_{n=1}^3 O_{nj}^B \sigma_m$ [70]. Fazendo $\vec{\alpha} = \vec{x}O^A$, $\vec{\beta} = \vec{y}(O^B)^T$ e notando que

$$\begin{aligned}
 U \otimes V \left(\sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) U^\dagger \otimes V^\dagger &= \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} (U \sigma_i U^\dagger) \otimes (V \sigma_j V^\dagger) \\
 &= \sum_{m,n=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 t_{ij} O_{im}^A O_{nj}^B \right) \sigma_m \otimes \sigma_n \\
 &= \sum_{m=1}^3 c_m \sigma_m \otimes \sigma_m,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

o estado ρ é localmente equivalente a

$$\rho = \frac{1}{4} \left(\mathbb{1}^{AB} + (\vec{a} \cdot \vec{\sigma}^A) \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}^B) + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \right). \tag{A.4}$$

Neste formato, a matriz densidade é completamente definida por nove parâmetros reais arranjados em vetores tridimensionais, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Todo estado de dois qubits pode então ser simplificado na sua forma normal através de transformações locais unitárias (que preservam emaranhamento e correlações em geral).

Apêndice B

Dinâmica completa do estado total

Neste apêndice iremos mostrar em detalhes como é possível obter a dinâmica do estado total utilizando a representação parcial P . Os cálculos aqui apresentados foram baseados na descrição feita em [135].

B.1 Representação parcial P do estado total

Vamos generalizar a representação P [130, 131] de um modo de campo bosônico, para um estado total sistema-reservatório (SR) ρ_T , a qual podemos formalmente expandir na seguinte forma:

Representação parcial P :

$$\rho_T = \int \frac{d^2 z}{\pi} \hat{P}(z, z^*) \otimes |z\rangle\langle z|, \quad (\text{B.1})$$

onde $|z\rangle = |z_1\rangle|z_2\rangle\cdots$ são os estados coerentes do ambiente, $d^2 z := d^2 z_1 d^2 z_2 \cdots$ e $\hat{P}(z, z^*)$ é um operador Hermitiano no espaço de estado do sistema, que depende dos vetores de dimensão infinita dos estados coerentes, $z = \{z_1, z_2, \cdots\}$ e $z^* = \{z_1^*, z_2^*, \cdots\}$.

Note que, como ρ_T é Hermitiano, a função parcial $\hat{P}(z, z^*)$ também deve ser Hermitiana. Entretanto, ela pode ter autovalores negativos e é positiva somente na média sobre os estados coerentes z e z^* , dado que ela deve produzir o operador densidade reduzido do

sistema. Isso pode ser visto aplicando o traço sobre os graus de liberdade do ambiente na base de estados coerentes acima. Vamos assumir que inicialmente o sistema e o ambiente não estão correlacionados, e o ambiente é descrito pelo estado térmico de muitos modos,

$$\begin{aligned}\rho_R &= \frac{1}{\bar{n}_1} \int \frac{d^2 z_1}{\pi} e^{-|z_1|^2/\bar{n}_1} |z_1\rangle \langle z_1| \frac{1}{\bar{n}_2} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} e^{-|z_2|^2/\bar{n}_2} |z_2\rangle \langle z_2| \cdots \\ &= \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-|z|^2/\bar{n}} |z\rangle \langle z|,\end{aligned}\tag{B.2}$$

o qual nós também expressamos na base de estados coerentes, com os números de ocupação térmica $\bar{n}_\lambda = (e^{-\omega_\lambda/k_B T} - 1)^{-1}$.

Com essa notação e a definição do estados coerentes de Bargmann (não-normalizados) $||z_\lambda\rangle = e^{a_\lambda^\dagger z_\lambda} |0\rangle = e^{-|z_\lambda|^2/2} |z_\lambda\rangle$ e $||z\rangle = ||z_1\rangle ||z_2\rangle \cdots$, o estado produto inicial $\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\rho_T(t=0) &= \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \rho_S(t=0) \otimes ||z\rangle \langle z|| \\ &\equiv \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \hat{\mathcal{P}}(t=0; z, z^*) \otimes ||z\rangle \langle z||,\end{aligned}\tag{B.3}$$

onde introduzimos a notação formal $(\bar{n}+1)|z|^2/\bar{n} = (\bar{n}_1+1)|z_1|^2/\bar{n}_1 + (\bar{n}_2+1)|z_2|^2/\bar{n}_2 + \cdots$.

Além disso, no último passo definimos a transformada da função parcial P

$$\hat{\mathcal{P}}(t; z, z^*) = \bar{n} e^{|z|^2/\bar{n}} \hat{P}(t; z, z^*),\tag{B.4}$$

a qual em $t=0$ produz o estado inicial do sistema $\rho_S(0)$ que é independente dos estados coerentes z_1, z_2, \cdots . Através da transformada da função P (B.4), o estado total (B.1) pode ser escrito como

$$\rho_T(t) = \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \hat{\mathcal{P}} \otimes ||z\rangle \langle z||.\tag{B.5}$$

B.2 Dinâmica da função parcial P

Consideramos um sistema quântico aberto, que está acoplado linearmente a um reservatório de osciladores harmônicos: $H_T = H_S + H_I + H_R$, com o Hamiltoniano do

reservatório $H_R = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$, o Hamiltoniano de interação $H_I = \sum_{\lambda} (g_{\lambda}^* S a_{\lambda}^{\dagger} + g_{\lambda} S^{\dagger} a_{\lambda})$, e com H_S denotando o Hamiltoniano do sistema não acoplado. Ao invés de investigar a dinâmica do sistema quântico aberto na média sobre os graus de liberdade do reservatório, vamos calcular a equação de evolução temporal para a função parcial P do sistema, descrevendo o estado combinado do sistema mais o ambiente. O estado total SR obedece a equação de von Neumann (2.39),

$$\dot{\rho}_T = -i[H_T(t), \rho_T], \quad (\text{B.6})$$

onde

$$H_T(t) = H_S + \sum_{\lambda} (g_{\lambda}^* e^{i\omega_{\lambda} t} S a_{\lambda}^{\dagger} + g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} S^{\dagger} a_{\lambda}) \quad (\text{B.7})$$

é o Hamiltoniano total na representação de interação. Já que desejamos obter uma equação dinâmica para P é evidente em (B.6) que devemos inserir a representação P de ρ_T . Isso é feito na forma (B.5), dado que a condição inicial é independente de z , $\hat{\mathcal{P}}(0) = \rho_S$. Com $a_{\lambda}||z_{\lambda}\rangle = z_{\lambda}||z_{\lambda}\rangle$ e $a_{\lambda}^{\dagger}||z_{\lambda}\rangle = \partial/\partial z_{\lambda}||z_{\lambda}\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \dot{\hat{\mathcal{P}}} \otimes ||z\rangle\langle z|| &= \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} (-i H_S \hat{\mathcal{P}}) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\ &+ \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \left(-i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} z_{\lambda} S^{\dagger} \hat{\mathcal{P}} \right) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\ &+ \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \left(-i \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* e^{i\omega_{\lambda} t} S \hat{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial z_{\lambda}} \right) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\ &+ c.c. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Já que $\langle z||$ não depende de z_{λ} , a derivada com respeito a z_{λ} na última linha da equação acima afeta o estado de Bargmann $||z\rangle$, então ele pode ser redistribuído aos integrandos restantes via integração por partes. De acordo com a regra do produto ele produz duas contribuições – a primeira é decorrente da dependência exponencial com z e a segunda é devida à sua ação na função parcial P – e temos que

$$\frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} S \left[-i \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* e^{i\omega_{\lambda} t} \left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} z_{\lambda}^* - \frac{\partial}{\partial z_{\lambda}} \right) \right] \hat{\mathcal{P}} \otimes ||z\rangle\langle z||. \quad (\text{B.9})$$

Em (B.9) e na segunda linha da equação (B.8) ocorrem certas combinações lineares dos estados coerentes z_λ e z_λ^* . Definindo os processos complexos:

$$\begin{aligned} z(t) &= i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} z_{\lambda}, \\ z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t) &= i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} \left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \right) z_{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Podemos generalizar essas definições da seguinte forma:

Definição: (Processo complexo geral e função de correlação): para uma sequência de números reais $f := \{f_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ definimos o processo complexo geral

$$z_f(t) := i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} f_{\lambda} z_{\lambda}. \quad (\text{B.11})$$

E da mesma forma podemos definir a função de correlação geral do ambiente $\alpha_f(t-s)$ como

$$\alpha_f(t-s) := \sum_{\lambda} |g_{\lambda}|^2 f_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda}(t-s)}. \quad (\text{B.12})$$

Note que enquanto o processo z_f depende dos estados coerentes z , a função de correlação α_f possui a mesma dependência.

Com $f_{\lambda} = (\bar{n}_{\lambda} + 1)/\bar{n}_{\lambda}$ ou $f_{\lambda} = 1$, a definição geral acima também inclui a definição dos processos $z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t)$ e $z(t)$. Com essas notações podemos agora considerar a segunda contribuição em (B.9). Ela envolve uma combinação linear de derivadas parciais com respeito a z_{λ} . Esta derivada geral pode ser convertida em uma derivada funcional por meio da regra da cadeia funcional

$$-i \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* e^{i\omega_{\lambda} t} \frac{\partial}{\partial z_{\lambda}} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t-s) \frac{\delta}{\delta z(s)}. \quad (\text{B.13})$$

De forma que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} \dot{\hat{\mathcal{P}}} \otimes ||z\rangle\langle z|| &= \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} (-iH_S \hat{\mathcal{P}}) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\
&\quad - \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} S^\dagger \hat{\mathcal{P}} z(t) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\
&\quad + \frac{1}{\bar{n}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}|z|^2} S \left(z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}^*(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t-s) \frac{\delta \hat{\mathcal{P}}}{\delta z(s)} ds \right) \otimes ||z\rangle\langle z|| \\
&\quad + c.c. \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Como uma consequência da forma especial dos processos $z(t)$ e $z^*(t)$, a derivada funcional resultante envolve a função de correlação de temperatura zero do banho $\alpha(t-s) = \sum_{\lambda} |g_{\lambda}|^2 e^{-i\omega_{\lambda}(t-s)}$. Finalmente, em equivalência à equação (B.14), obtemos a seguinte equação para a função parcial P dos sistemas.

Equação de evolução exata para a função parcial P :

$$\dot{\hat{\mathcal{P}}} = iH_S \hat{\mathcal{P}} - S^\dagger \hat{\mathcal{P}} z(t) + S \hat{\mathcal{P}} z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}^*(t) - S \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t-s) \frac{\delta \hat{\mathcal{P}}(s)}{\delta z(s)} ds + c.h. \tag{B.15}$$

Apesar de ser exata, esta equação tem a desvantagem de não ser fechada em $\hat{\mathcal{P}}$. Pelo contrário, envolve em geral derivadas funcionais complicadas da função parcial P com respeito ao processo complexo $z(s)$ e $z^*(s)$. É um problema em aberto determinar sob quais condições essas derivadas funcionais $\int_{-\infty}^{\infty} ds \alpha(t-s) \delta \hat{\mathcal{P}} / \delta z(s)$ e seu conjugado Hermitiano podem ser substituídos pela ação de algum operador linear O e O^\dagger independente de z em $\hat{\mathcal{P}}$.

B.3 Substituição das derivadas funcionais

B.3.1 Dinâmica exata: sistema de dois qubits num canal de defasagem

Nosso objeto de estudo dessa tese é o sistema de dois qubits sujeito à descoerência induzida pelo ambiente, sem qualquer troca de energia (depahsing puro). Tal sistema

é descrito por uma equação quântica mestra que envolve o Hamiltoniano do sistema $H_S = \frac{\hbar\Omega_A}{2}(\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) + \frac{\hbar\Omega_B}{2}(\mathbb{1}^A \otimes \sigma_3^B)$ e os operadores de Lindblad $S = \sigma_z$. A evolução do sistema composto incluindo o ambiente é determinada pelo Hamiltoniano

$$H_T = \frac{\hbar\Omega_A}{2}(\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) + \frac{\hbar\Omega_B}{2}(\mathbb{1}^A \otimes \sigma_3^B) + (\sigma_3^A \otimes \mathbb{1}^B) \otimes \sum_{\lambda} \left(g_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda}t} a_{\lambda} + g_{\lambda}^* e^{i\omega_{\lambda}t} a_{\lambda}^{\dagger} \right),$$

através da equação de von Neumann $\dot{\rho}_T = -i[H_T, \rho_T]$, e em analogia com a evolução temporal que a função parcial P obedece (B.15), onde é inserida a escolha acima de H_S e S . Devido às derivadas funcionais introduzidas na seção anterior, entretanto, esta equação não é fechada em \hat{P} e portanto sua solução não é óbvia. De maneira a substituir essas derivadas funcionais, é útil primeiro derivar uma função Q de Husimi da equação de evolução para os qubits $\hat{Q}(z, z^*)$ [120]. Esta quantidade é dada pelo valor esperado $\langle z | \rho_T | z \rangle$ do operador densidade total no estado coerente $|z\rangle = |z_1\rangle |z_2\rangle \cdots$ do ambiente. Para obter a equação desejada, calculamos $\dot{\hat{Q}}(z, z^*) = \langle z | \dot{\rho}_T | z \rangle$ por meio da equação de von Neumann e obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{Q}} = & -\frac{i\hbar\Omega_A}{2} [\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B, \hat{Q}] - \frac{i\hbar\Omega_B}{2} [\mathbb{1}^A \otimes \sigma_z^B, \hat{Q}] - i \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* e^{-i\omega_{\lambda}t} \sigma_z \langle z | a_{\lambda} \rho_T | z \rangle \\ & + i \sum_{\lambda} g_{\lambda}^* e^{-i\omega_{\lambda}t} z_{\lambda} \hat{Q} \sigma_z - i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{i\omega_{\lambda}t} z_{\lambda}^* \sigma_z \hat{Q} + i \sum_{\lambda} g_{\lambda} e^{i\omega_{\lambda}t} \langle z | a_{\lambda}^{\dagger} \rho_T | z \rangle \sigma_z. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Na equação acima usamos as relações de autovalores $a_{\lambda}|z\rangle = z_{\lambda}|z\rangle$ e $\langle z | a_{\lambda}^{\dagger} = z_{\lambda}^* \langle z |$. Para simplificar a equação (B.16) temos agora que investigar expressões na forma $\langle z | a_{\lambda} \rho_T(t) | z \rangle$ na qual os operadores de criação e aniquilação atuam no conjugado Hermitiano dos seus autoestados. Para este fim, expressamos o operador densidade total num tempo t por meio do operador de evolução temporal $U_T(t)$ e inserimos o operador unidade $\mathbb{1} = U_T(t)U_T^{\dagger}(t)$ em frente ao operador de aniquilação,

$$\langle z | a_{\lambda} \rho_T(t) | z \rangle = \langle z | U_T(t) U_T^{\dagger}(t) a_{\lambda} U_T(t) \rho_T(0) U_T^{\dagger}(t) | z \rangle, \quad (\text{B.17})$$

onde $a_{\lambda}(t) = U_T^{\dagger}(t) a_{\lambda} U_T(t)$. O operador de Heisenberg emergente $a_{\lambda}(t)$ pode ser determinado a partir da equação de movimento $\dot{a}_{\lambda} = -i[H_T(t), a_{\lambda}]$, e obtém-se $a_{\lambda}(t) = a_{\lambda} - g_{\lambda} \sigma_z (e^{i\omega_{\lambda}t} - 1) / \omega_{\lambda}$. Aqui, a primeira contribuição somente constitui o operador de Schrödinger independente do tempo a_{λ} e portanto atua no espaço de Hilbert do ambiente,

enquanto que o segundo afeta somente a parte do sistema. Como σ_z comuta com o Hamiltoniano do sistema, e assim com todo o operador de evolução temporal, esta segunda contribuição de $a_\lambda(t)$ pode ser fatorada do valor esperado acima, obtendo

$$\langle z|a_\lambda(t)\rho_T|z\rangle = \frac{g_\lambda}{\omega_\lambda}\sigma_z(e^{i\omega_\lambda t} - 1)Q_t + \langle z|U_T(t)a_\lambda\rho_T(0)U_T^\dagger(t)|z\rangle. \quad (\text{B.18})$$

Com este procedimento nós movemos o operador de aniquilação a_λ um passo mais perto de seu autoestado $|z\rangle$. Para mudar ainda mais sua posição também com $\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_{therm}$ usamos a relação

$$a_\lambda\rho_{therm} = e^{-\omega_\lambda/k_BT}\rho_{therm}a_\lambda. \quad (\text{B.19})$$

Substituindo a relação correspondente para $\rho_T(0)$ em (B.18), a única coisa que resta a ser feita é mover a_λ para a frente do operador de evolução temporal $U_T^\dagger(t)$. Isso pode ser feito analogamente às considerações que levaram a (B.18) e chegamos em

$$\begin{aligned} \langle z|a_\lambda\rho_T(t)|z\rangle &= \frac{g_\lambda}{\omega_\lambda}\sigma_z(e^{i\omega_\lambda t} - 1)\sigma_z\hat{Q}_t \\ &+ e^{-\omega_\lambda/k_BT}\frac{g_\lambda}{\omega_\lambda}(e^{i\omega_\lambda t} - 1)\hat{Q}_t\sigma_z + e^{-\omega_\lambda/k_BT}z_\lambda\hat{Q}_t. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Repetindo esse mesmo procedimento com a expressão conjugada Hermitiana correspondente $\langle z|\rho_T(t)a_\lambda^\dagger|z\rangle$, nós finalmente derivamos a seguinte equação temporal para a função parcial Q :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{Q}} &= -\frac{i\hbar\Omega_A}{2}[\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B, \hat{Q}] - \frac{i\hbar\Omega_B}{2}[\mathbb{1}_z^A \otimes \sigma_z^B, \hat{Q}] - \int_0^t 2\mathbb{R}[\alpha(t-s)]ds\hat{Q} \\ &+ \int_0^t 2\mathbb{R}[\alpha_{\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}(t-s)]ds(\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B)\hat{Q}(\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) \\ &+ \left[\hat{Q}(\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B)z(t) - (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B)\hat{Q}z_{\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}(t) \right] \\ &+ \left[(\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B)\hat{Q}z^*(t) - \hat{Q}(\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B)z_{\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}(t) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

onde usamos a relação $e^{-\omega_\lambda/k_BT} = \bar{n}_\lambda/(\bar{n}_\lambda+1)$ e também introduzimos o processo complexo z_f e a função de correlação α_f com $f \equiv \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} := \left\{ \frac{\bar{n}_\lambda}{\bar{n}_\lambda+1} \right\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ de acordo com as definições (B.11) e (B.12).

Com a equação (B.21) nós chegamos mais perto do nosso objetivo de evitar a emergên-

cia de derivadas funcionais $\int_{-\infty}^{\infty} ds \alpha(t-s) \delta \hat{\mathcal{P}} / \delta z(s)$ e c.h. na equação (B.15). Ela constitui uma equação fechada para a função parcial Q , a qual pode ser resolvida prontamente para um sistema de dois qubits inicial dado pela equação (2.53), resultando em

$$\hat{Q}(t; z, z^*) = \frac{e^{-|z|^2/(\bar{n}+1)}}{\bar{n}+1} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+^{\hat{Q}} \rho_{11} & 0 & 0 & \mathcal{B}_+^{\hat{Q}} \rho_{14} \\ 0 & \mathcal{A}_+^{\hat{Q}} \rho_{22} & \mathcal{B}_-^{\hat{Q}} \rho_{23} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_-^{\hat{Q}*} \rho_{23}^* & \mathcal{A}_-^{\hat{Q}} \rho_{33} & 0 \\ \mathcal{B}_+^{\hat{Q}*} \rho_{14}^* & 0 & 0 & \mathcal{A}_-^{\hat{Q}} \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

onde os componentes da matriz $\mathcal{A}_{\pm}^{\hat{Q}}(t)$ e $\mathcal{B}_{\pm}^{\hat{Q}}(t)$ são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pm}^{\hat{Q}}(t) &= \exp \left[-A_{\frac{1}{\bar{n}+1}}(t) \right] \exp \left[\pm \left(\vec{u}_{\frac{1}{\bar{n}+1}}^*(t) \cdot \vec{z} + \vec{u}_{\frac{1}{\bar{n}+1}}(t) \cdot \vec{z}^* \right) \right], \\ \mathcal{B}_{\pm}^{\hat{Q}}(t) &= \exp[-i(\Omega_A \pm \Omega_B)t] \exp \left[-A_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}+1}}(t) \right] \exp \left[- \left(\vec{u}_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}+1}}^*(t) \cdot \vec{z} - \vec{u}_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}+1}}(t) \cdot \vec{z}^* \right) \right]. \end{aligned}$$

Para as equações acima se manterem legíveis, no senso das definições (B.11) e (B.12) nós definimos as funções $A_f(t) = \int_0^t \int_0^s \alpha_f(s-\tau) d\tau ds$, e também os vetores de dimensão infinita $\vec{u}_f(t) = \left\{ \int_0^t f_{\lambda} g_{\lambda} \exp[i\omega_{\lambda}s] ds \right\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ para duas sequências diferentes de números reais $f_{\lambda} = 1/(\bar{n}_{\lambda} + 1)$ ou $f_{\lambda} = (2\bar{n}_{\lambda} + 1)/(\bar{n}_{\lambda} + 1)$.

Esta solução a princípio nos permite obter a representação matricial da função P através da relação $\chi_{\hat{P}}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^*) = \exp[|\vec{\zeta}|^2] \chi_{\hat{Q}}(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}^*)$ entre as funções características correspondentes no espaço de Fourier: obtém-se

$$\hat{P}(\vec{z}, \vec{z}^*) = \int \frac{d^2 \vec{\zeta}}{\pi} e^{\vec{\zeta}^* \cdot \vec{z} - \vec{\zeta} \cdot \vec{z}^*} e^{|\vec{\zeta}|^2} \int \frac{d^2 \vec{\xi}}{\pi} e^{\vec{\xi}^* \cdot \vec{\zeta} - \vec{\xi} \cdot \vec{\zeta}^*} \hat{Q}(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*). \quad (\text{B.23})$$

Utilizando a identidade $\int \exp[\alpha\eta + \beta\eta - \gamma|\eta|^2] d^2\eta/\pi = \exp[\alpha\beta/\gamma]/\gamma$ para $\eta, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, e observando que $A_f(t) = |\vec{u}_f(t)|^2$ para uma das sequências definidas acima $f = \{f_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$, finalmente obtém-se

$$\hat{P}(t; \vec{z}, \vec{z}^*) = \frac{e^{-\frac{|\vec{z}|^2}{\bar{n}}}}{\bar{n}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ \rho_{11} & 0 & 0 & \mathcal{B}_+ \rho_{14} \\ 0 & \mathcal{A}_+ \rho_{22} & \mathcal{B}_- \rho_{23} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_-^* \rho_{23}^* & \mathcal{A}_- \rho_{33} & 0 \\ \mathcal{B}_+^* \rho_{14}^* & 0 & 0 & \mathcal{A}_- \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

onde neste caso os componentes de matriz $\mathcal{A}_\pm(t)$ e $\mathcal{B}_\pm(t)$ são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\pm(t) &= \exp \left[-A_{\frac{1}{\bar{n}}}(t) \right] \exp \left[\pm \left(\vec{u}_{\frac{1}{\bar{n}}}^*(t) \cdot \vec{z} + \vec{u}_{\frac{1}{\bar{n}}}(t) \cdot \vec{z}^* \right) \right], \\ \mathcal{B}_\pm(t) &= \exp[-i(\Omega_A \pm \Omega_B)t] \exp \left[-A_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t) \right] \exp \left[- \left(\vec{u}_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}}}^*(t) \cdot \vec{z} - \vec{u}_{\frac{2\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t) \cdot \vec{z}^* \right) \right].\end{aligned}$$

Com o conhecimento de $\hat{P}(t, \vec{z}, \vec{z}^*)$ nós já temos o estado total SR via $\rho_T = \int \hat{P} \otimes |\vec{z}\rangle \langle \vec{z}| d^2 \vec{z} / \pi^1$. Diferenciando a equação (B.24) com respeito ao tempo, obtém-se a seguinte equação para a função parcial P :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{P}} &= -\frac{i\hbar\Omega_A}{2} \left[\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B, \hat{Q} \right] - \frac{i\hbar\Omega_B}{2} \left[\mathbb{1}^A \otimes \sigma_z^B, \hat{Q} \right] + \int_0^t 2\mathbb{R}[\alpha(t-s)] ds \hat{P} \\ &\quad - \int_0^t 2\mathbb{R}[\alpha_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t-s)] ds (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) \hat{P} (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) + \hat{P} (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t) \\ &\quad - (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) \hat{P} z(t) + (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) \hat{P} z_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}^* - \hat{P} (\sigma_z^A \otimes \mathbb{1}^B) z^*(t).\end{aligned}\tag{B.25}$$

Desde que a função parcial P difere de \mathcal{P} somente por um fator $e^{-|\vec{z}|^2/\bar{n}}$, esta quantidade obedece a mesma equação de evolução. Por comparação com a equação (B.15), encontra-se que neste modelo simples para o sistema é consistente substituir as derivadas funcionais $\int_{-\infty}^{\infty} ds \alpha(t-s) \delta \hat{\mathcal{P}} / \delta z(s)$ e h.c. da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} ds \alpha(t-s) \frac{\delta \hat{\mathcal{P}}}{\delta z(s)} &= \int_0^t \alpha_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}(t-s) ds \hat{P} \sigma_z - \int_0^t \alpha(t-s) ds \sigma_z \hat{P}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} ds \alpha^*(t-s) \frac{\delta \hat{\mathcal{P}}}{\delta z^*(s)} &= \int_0^t \alpha_{\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}}^*(t-s) ds \hat{P} \sigma_z - \int_0^t \alpha^*(t-s) ds \hat{P} \sigma_z.\end{aligned}\tag{B.26}$$

¹Algumas modificações nas expressões acima foram feitas no capítulo 6 de forma a melhorar a sua legibilidade. Por exemplo, definimos as funções α e β ao invés de utilizar $A_f(t)$